

ESCOLA POLITECNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

TRABALHO DE FORMATURA

10,0  
(dez)  


"DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DINAMICAS DE UM AMORTECEDOR STOCKBRIDGE."

COMPARAÇÃO DO MODELO TEORICO COM O EXPERIMENTAL.

AUTOR: MARCO VITIELLO

ORIENTADOR: DR. PROF. FRANCISCO  
E.B. NIGRO

534.01  
V833d

Vitiello, Marco.  
Determinação das características dinâmicas de um amortecedor Stockbridge.  
Orientador Prof.Dr.Francisco E.B.Nigro  
São Paulo, EPUSP, 1980.  
89p.ilus.graf.tab 30cm

TF-80

Bibliografia no fim do volume.  
Vibrações 534.01.

## S U M A R I O

NESTE TRABALHO ESTUDA-SE O COMPORTAMENTO DE UM CONDUTOR, DE LINHAS DE TRANSMISSAO AEREA, EXPOSTO A UMA CORRENTE DE AR.

AVALIA-SE A ENERGIA INTRODUZIDA PELO VENTO E AS FORÇAS DE CARATER VIBRATORIO.

EXPÕE-SE A ANALISE COMPLETA DE UM AMORTECEDOR' DE VIBRAÇÕES COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE DO TIPO STOCK-BRIDGE E OS METODOS DE CALCULO PARA DETERMINAR AS FREQUENCIAS NATURAIS, POTENCIA DISSIPADA E A FORÇA TRANSMITIDA AO CONDUTOR.

VERIFICA-SE O COMPORTAMENTO DE UM MODELO TEORICO AO SER COMPARADO COM O EXPERIMENTAL.

1669161

Introdução	1
Capitulo I : "Formas de excitação aerodinâmica sobre um cilindro	3
Capitulo II: "Tipos de vibrações que ocorrem ' em condutores expostos ao vento"	10
Capitulo III: "Vibrações aeólicas - Energia intro <u>duzida pelo vento</u>	12
1.Generalidades	12
2.Frequencia das vibrações aeólicas	17
3.Forças sobre o condutor	18
3.1.Força de arrasto	18
3.2.Força de sustentação(Força Kármániana)	20
4.Energia introduzida pelo vento	25
Capitulo IV: "Determinação da frequencia natural e Potencia dissipada por um condutor ' sob tensão	30
1.Generalidades	30
2.Determinação da frequencia natural do condutor	30
3.Determinação do comprimento de onda	37
4.Determinação da potencia dissipada pelo condutor	38
Capitulo V: "Determinação das características di <u>namicas de um amortecedor tipo Stockbridge</u>	43
1.Generalidades	43
2.Descrição do amortecedor Stockbridge	43
3.Determinação da frequencia de resso' nancia de um amortecedor Stockbridge	44

3.1.Determinação das equações de e- quilíbrio	51
4.Análise dos dois modos principais de vibrar.	55
4.1.Primeiro modo de vibrar	56
4.2.Segundo modo de vibrar	60
Capitulo VI: "Comparação do modelo teorico obtido com o experimental	
1.Generalidades	64
2.Descrição do sistema empregado para o levantamento das características di- namicas do amortecedor	64
3.Determinação das principais caracteris- ticas geométricas do amortecedor Stock bridge	68
3.1.Determinação do volume e peso de u- ma calota	68
3.2.Determinação do centro de massa	70
3.3.Determinação do momento de inér- cia	73
4.Determinação das frequencias naturais do amortecedor e da constante elásti- ca K do cabo	78
5.Determinação do coeficiente de amorte- cimento histerético h do cabo mensagei- ro	81
6.Levantamento das curvas do modelo dina- mico	82
6.1.Levantamento das curvas para o 1º mo- do de vibrar	82
6.2.Levantamento das curvas para o 2º mo- do de vibrar	82
CONCLUSÃO	87
BIBLIOGRAFIA	

## INTRODUÇÃO

Vibrações de significativa magnitude podem ser induzidas pelo vento em uma grande variedade de estruturas, inclusive prédios, torres, chaminés, pontes, linhas de transmissão e etc...

Nenhuma estrutura exposta ao vento está inteiramente imune a esta excitação.

O trabalho apresentado aqui, atem-se somente ao problema das vibrações transversais em condutores de linhas de transmissão; procurando dar uma visão geral deste fenômeno, e permitir o estudo do dispositivo amortecedor criado por Stockbridge, para limitar a amplitude dessas vibrações induzidas pelo vento. Além disso, determinaremos as características dinâmicas do amortecedor Stockbridge, fazendo uma comparação do modelo teórico com o experimental. Escolheu-se para o estudo este tipo de amortecedor por ser o mais difundido, mas o método de análise é válido para outros amortecedores com um ou dois graus de liberdade.

As oscilações causadas pelo vento, podem provocar ruptura por fadiga nos fios condutores - geralmente feitos de alumínio - o que ocasionaria a interrupção no fornecimento de energia elétrica para uma região, causando sérios prejuízos econômicos.

Historicamente a ruptura por fadiga em condutores foi primeiramente notada mas não reconhecida como tal, em 1917, em uma linha com suportes de madeira que sustentava cabos de alumínio tipo ACSR (com alma de aço) de bitola 2AWG em vãos com comprimento de aproximadamente 55 metros.



Esta ruptura foi encontrada próxima aos tarugos isoladores.

A linha fora observada vibrando em ritmo de meia onda estacionária por vão, com o ponto mais alto indo e voltando em direção da linha. Nesta ocasião a ruptura foi atribuída a "corrosão intercristalina", mas era na realidade causada pela fadiga do material.

Em 1923, outras quebras foram constatadas nos fios condutores da linha "Big Creek" da Southern California Edison Co. depois de ter permanecido em serviço ao longo de dez anos. Aqui a causa não foi imediatamente reconhecida.

Observações posteriores, revelaram a ocorrência de vibrações em forma de um número de ondas estacionárias em cada vão. A vibração ocorria mais frequentemente pela manhã, ou a tarde, quando correntes de ar eram constantes e de velocidade moderada.

Estes problemas foram notados logo na introdução de condutores de alumínio, e marcaram o início dos estudos e pesquisas a respeito de vibrações em condutores.

## CAPITULO - I

### "FORMAS DE EXCITAÇÃO AERODINAMICA SOBRE UM CILINDRO."

Sobre superfícies curvas, ou mesmo sobre superfícies planas com fortes gradientes de pressão ao longo do sentido do escoamento, verifica-se o fenômeno de descolamento do escoamento.

Quando um fluido escoar paralelamente a uma placa plana, na ausência de um gradiente de pressão, externamente a camada limite, a velocidade do fluido permanece constante, o mesmo acontecendo com a pressão estática, visto que para fluidos não viscosos é válida a equação de Bernoulli.

O fenômeno da separação da camada limite é intimamente ligado à distribuição de pressão ao longo da camada limite.

Para facilitar a explicação do fenômeno de separação da camada limite, vamos considerar um fluxo perpendicular a um cilindro conforme mostrado na figura 1.

As partículas fluidas são aceleradas no percurso de D até E, e desaceleradas no percurso de E à F; portanto a pressão diminui de D até E e aumenta de E até F. A camada limite está se modificando, pois está ocorrendo uma transformação de pressão em energia cinética ao longo de DE. O inverso ocorre no trajeto de E à F. As partículas, dentro da camada limite, perdem energia na trajetória DE devido às



forças viscosas, de maneira que a energia restante não é suficiente para superar o aumento de pressão de E para F (figura 1.).

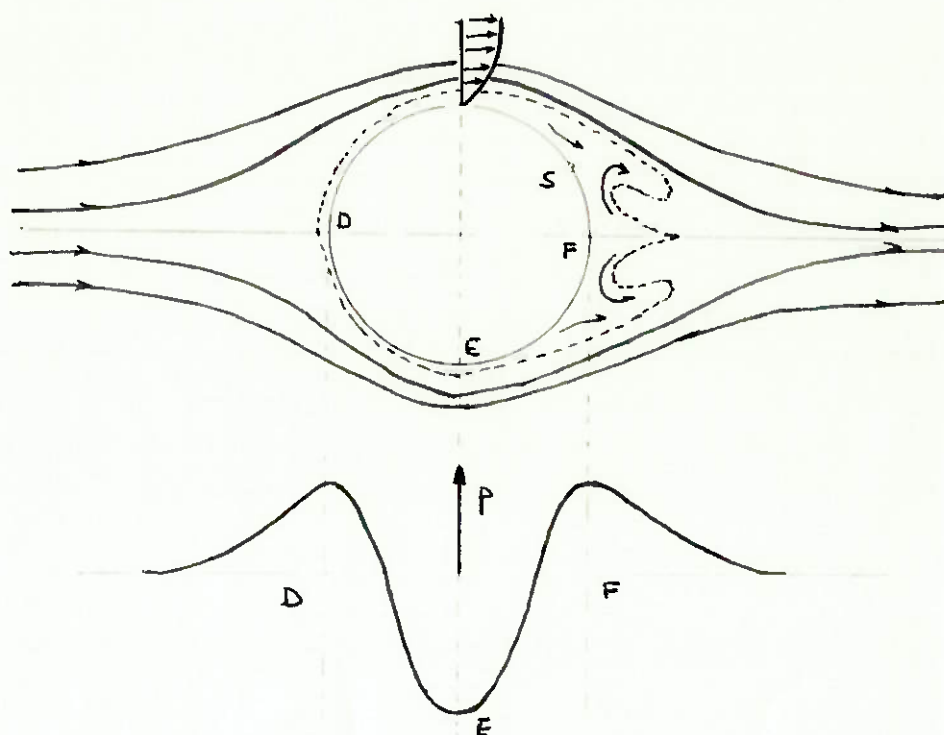


Figura 1 - (ref.13) - Separação da camada limite e formação de vórtices em um cilindro circular.

As partículas vão sendo desaceleradas e acumulam-se de tal maneira atrás do cilindro que provocam a separação do escoamento junto a parede, obrigando ao mesmo tempo um escoamento em sentido contrário para a sua remoção.

Na figura 2 apresenta-se um esquema da distribuição dos perfis de velocidade de um escoamento sobre uma super

fície curva. Verifica-se que o efeito da desaceleração na camada limite provoca a modificação dos perfis de velocidade a partir de (1) até ser atingida a configuração indicada em (2). A partir dessa configuração tem-se perfis de velocidade que apresentam uma inversão como a indicada em (3), e correspondentemente tem-se o escoamento, nas imediações da superfície, orientado em sentido oposto ao escoamento geral. Resulta a partir de (2) um descolamento do escoamento sobre a superfície curva.

A linha de corrente da fronteira que deixa o contorno sólido no ponto de descolamento, marca o limite de um movimento regular à montante que sofreu mudança de direção; e movimento irregular, fortemente turbilhonar, à jusante, onde se produz uma corrente de retorno.

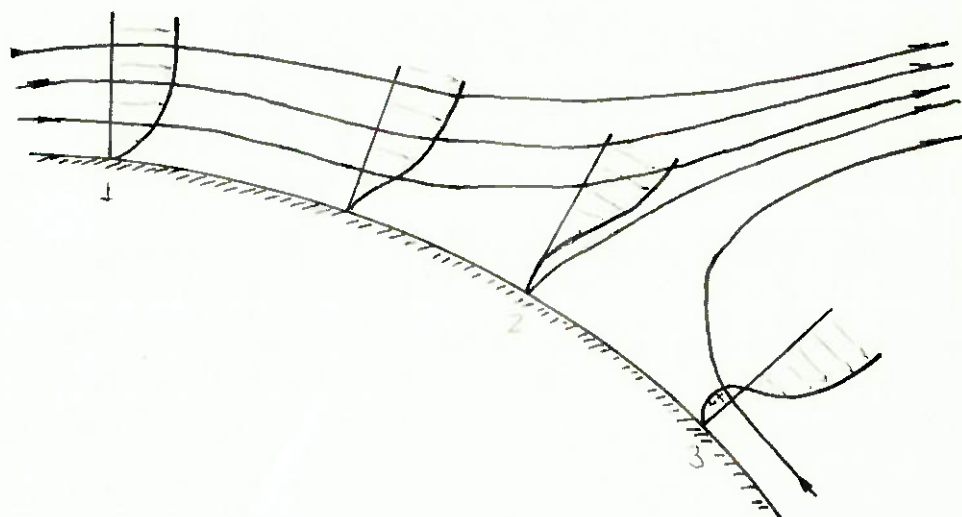


Figura 2 - Perfis de velocidade sobre superfície curva.

O fluxo ilustrado na figura 3 representa a média dos movimentos das partículas, tomadas em um intervalo de tempo muito longo, quando comparado com a relação  $D/V$  ' ( razão entre o diâmetro do cilindro e a velocidade do fluxo ).

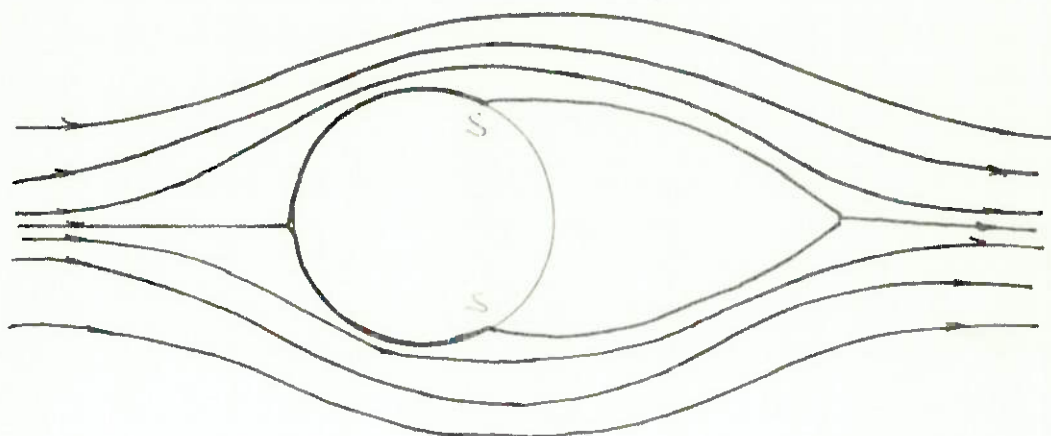


Figura 3

A posição exata dos pontos de descolamento depende de diversos fatores, sendo o de maior importância o número de Reynolds ( $Re = VD/\nu$ ). Influem também a rugosidade do contorno sólido e a turbulência do escoamento ao longe.

A representação instantânea, pode ser considerada como a indicada na figura 4 :

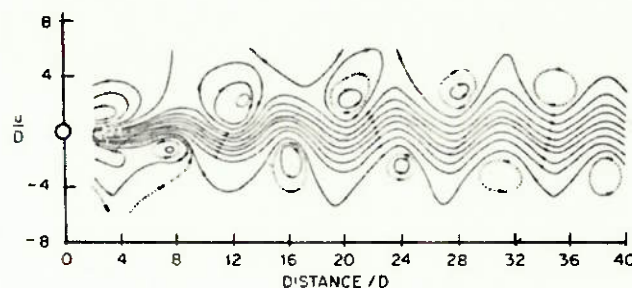


Figura 4 - (ref.14) - Esteira de vórtices. (Re=56)

O tamanho dos vórtices deixados atrás do corpo, são de tamanho quase igual ao do corpo; estes geram-se nos pontos de descolamento sendo carregados na direção a jusante do fluxo. Muitas vezes estes vórtices são completamente regulares e são soltos alternadamente de cada lado. Caso o fluxo seja fortemente turbulento esta regularidade é quebrada.

As características do fluxo de ar e a esteira formada atrás do corpo, são as causas diretas das forças responsáveis pelas oscilações nos corpos. Os tipos de oscilações são as seguintes:

- (a) Oscilações produzidas pela flutuação da velocidade do vento: estas flutuações da velocidade do vento são transformadas em variações de pressão sobre a estrutura exposta. Estas oscilações podem ser descritas como oscilações produzidas por rajadas de vento. (figura 5)

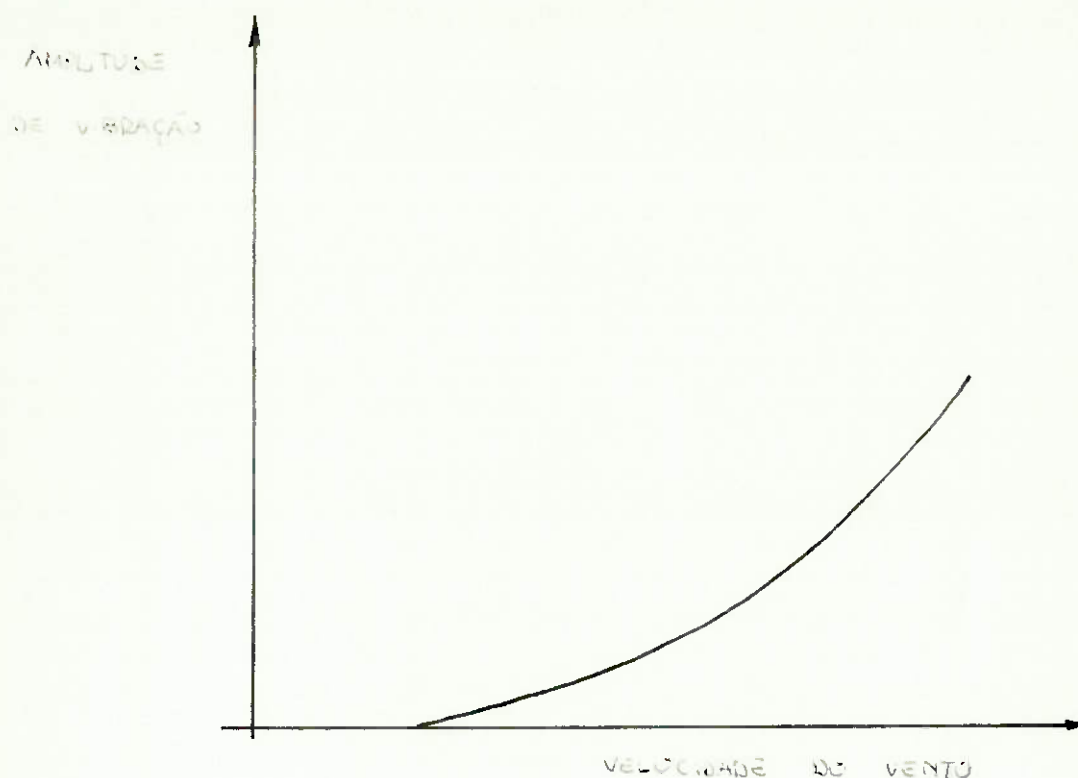


Figura 5 - Oscilação produzida por rajadas de vento.

- (b) Oscilações induzidas pela esteira: nestes casos o caráter vibratório dos vórtices que se formam na esteira é o agente predominante. Estas vibrações são geralmente provocadas pelo descolamento alternativo dos vórtices, primeiro de um lado do corpo, depois do outro lado. O resultado destes movimentos alternados é chamado de oscilação induzida por vórtices. (figura 6)
- (c) Galope: este mecanismo de excitação é associado com os movimentos da própria estrutura. Quando a estrutura se move relativamente em relação ao fluxo de ar como resposta às forças que agem sobre si, esta modifica o regime do fluxo circundante, realimentando-as. (figura 7).



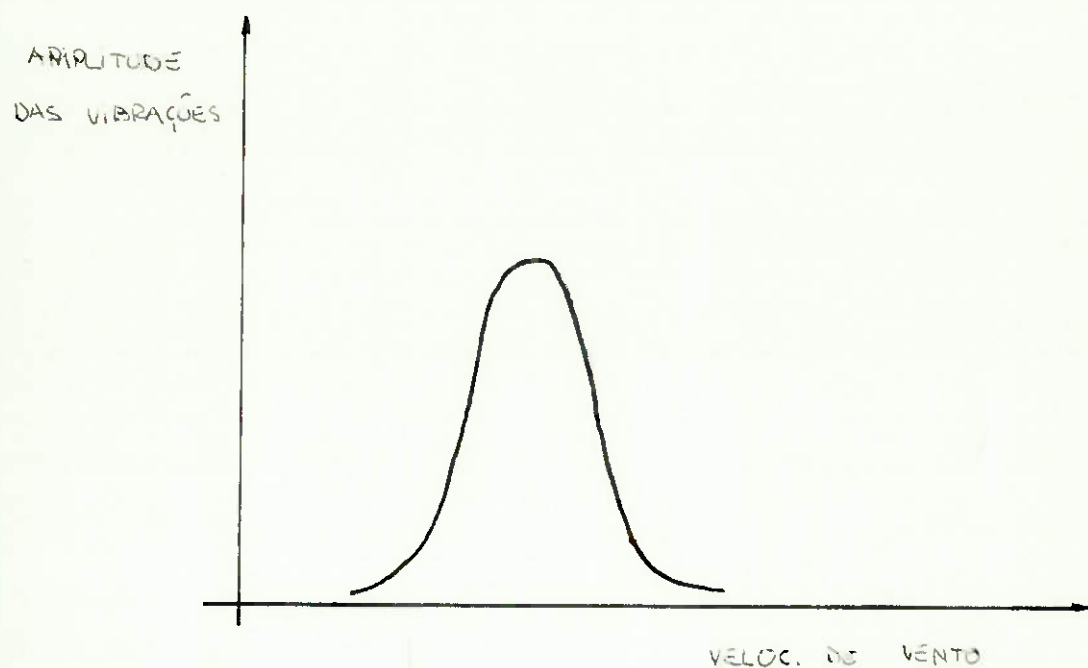


Figura 6 - Vibrações causadas por descolamento alternativo dos vórtices.

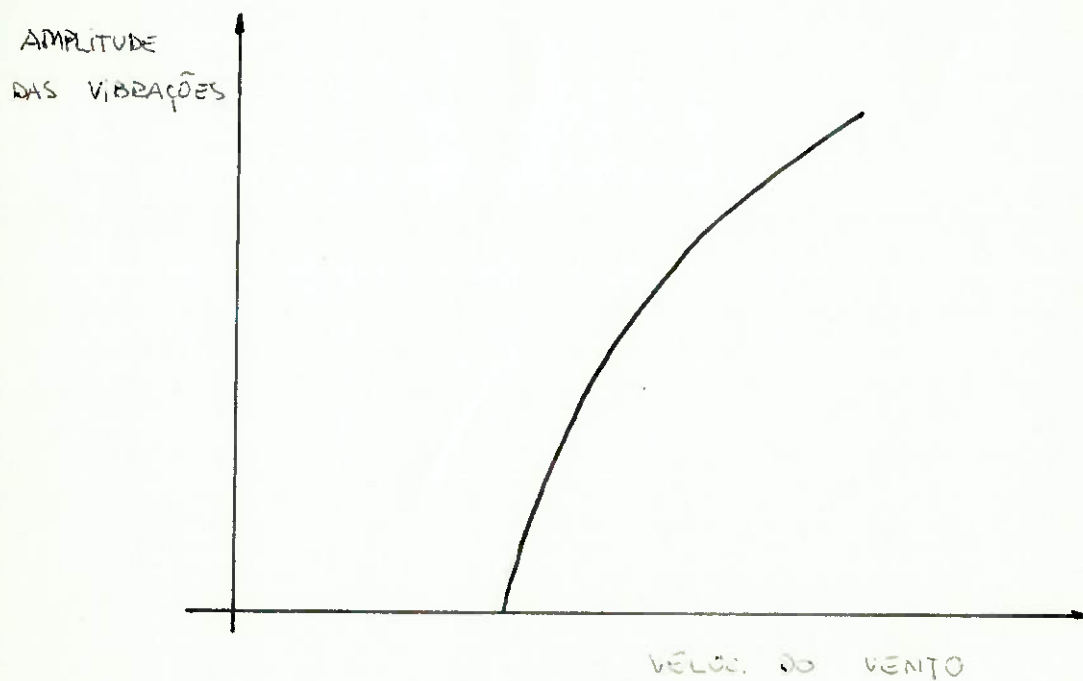


Figura 7 - Vibrações devido instabilidade aerodinamica.

## CAPITULO II

### "TIPOS DE VIBRAÇÕES QUE OCORREM EM CONDUTORES EXPOSTOS AO VENTO."

Os fenômenos vibratórios tem ocorrido em condutores fabricados com qualquer tipo de material e qualquer construção. Estas oscilações podem ser classificadas em três tipos gerais de acordo com o que se segue:

- Balanço ou oscilação lateral: a mais óbvia e simples forma de movimento do condutor em um vão completo - é causado por um vento lateral.
- Vibração aéolica: uma vibração ressonante, menos observada que as demais, mas geralmente a mais maléfica das formas. É causada por um vento lateral constante. Os condutores neste caso, vibram com o formato de ondas estacionárias, da mesma maneira que qualquer corda sob tensão.
- Galope: movimento que resulta da interrelação entre a direção do vento e a sua velocidade, sendo influenciado também pela temperatura e umidade. Normalmente ocorre quando o condutor torna-se excentrico devido a uma camada de gelo. O padrão de vibração desenvolvida neste caso faz com que vãos completos oscilem como um todo, com amplitude de vários metros e com baixa frequência. O movimento que o condutor descreve no plano perpendicular aos condutores, tem geralmente a forma de uma elipse inclinada.

Os dois últimos fenômenos, vibrações aeólicas e galope, são aqueles que representam os mais sérios problemas, visto que cada um deles pode provocar o rompimento dos condutores, em pontos próximos aos suportes das torres que o sustentam, ou em outras descontinuidades pronunciadas.

O fenômeno de galope caracteriza-se por ter frequência muito baixa e grande amplitude, sendo observado onde as condições climáticas provocam depósitos de gelo juntamente com vento lateral de considerável velocidade.

No caso de vibrações aeólicas, temos altas frequências e pequenas amplitudes, que fazem deste tipo de vibração a mais comum, visto que dependem apenas da existência de ventos laterais.

### CAPITULO III

#### "VIBRAÇÕES AEÓLICAS - ENERGIA INTRODUZIDA PELO VENTO,"

##### 1. GENERALIDADES.

Conforme foi dito anteriormente no capítulo I; quando um fluido escoar em torno de um condutor cilíndrico, a esteira atrás do obstáculo não é regular mas serão encontrados vórtices distintos como os mostrados na figura 8 (ref. ' 13).

Estes vórtices são descolados em intervalos regulares, de ambos os lados do condutor, alternadamente. A relação de descolamento destes vórtices é função do número de Reynolds, e cada descolamento é acompanhado de uma pequena força vertical.

No escoamento com números de Reynolds bastante baixos ( $Re < 20$ ) é muito pequena a tendência para o descolamento, conforme pode ser verificado nas figuras 8a. e 8b.. A medida que aumentamos o número de Reynolds para valores compreendidos entre 20 e 100 inicia-se o fenômeno do descolamento mediante a formação de dois vórtices simétricos e estacionários. (figuras 8c. e 8d.)

Aumentando-se ainda mais os números de Reynolds inicia-se a oscilação com o descolamento periódico dos vórti



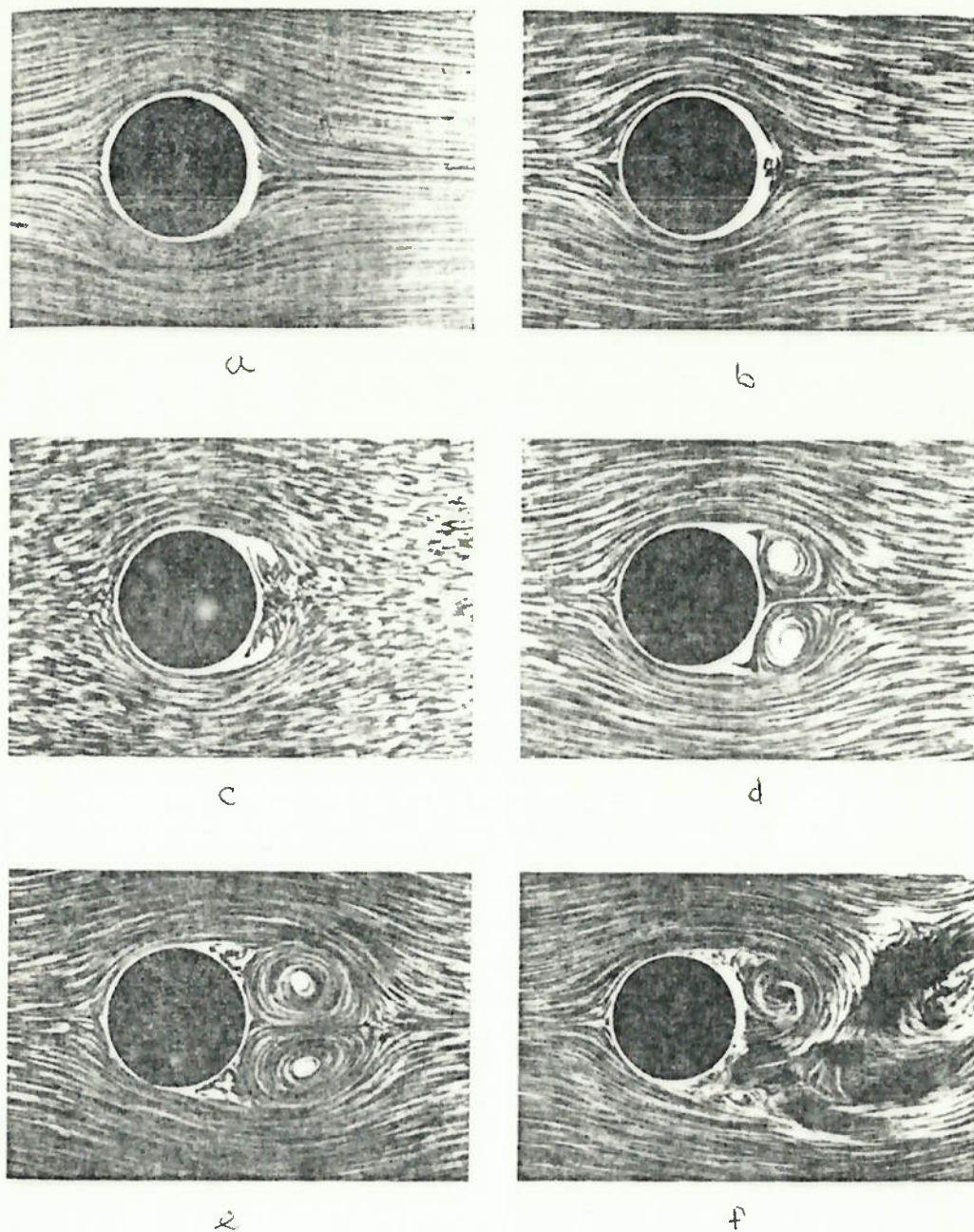


Figura 8 - (ref.13) - Sequencia de formação dos vórtices.

Obs.: A visualização do escoamento da figura 8 foi obtida pelo emprego do método da cuba de pó de alumínio.



ces, denominados vórtices de Kármán, que ocorrem para números de Reynolds na faixa de 100 a 200.000.(ref.2.)

Estas pequenas forças verticais que acompanham o descolamento dos vórtices Kármánianos, submetem o condutor repetidamente a forças que agem acima e abaixo do seu corpo.

O processo de formação periódica de oscilações Kármánianas prende-se a existência de um movimento regular, abaixo das velocidades que levam a turbulência geral.

As vibrações não ocorrem para altas velocidades do vento, pois provocam grandes frequências de vibração fazendo com que o auto-amortecimento do condutor cresça rapidamente com a frequência da vibração. Isto pode ser observado na figura 9 que mostra a dissipação de energia interna no condutor em função da frequência e amplitude da vibração.

A tendencia de um condutor vibrar cresce rapidamente com o incremento da tensão aplicada ao condutor, porque isto faz com que a capacidade de auto-amortecimento do condutor se reduza (figura 10.)

A partir de resultados de estudos chegou-se a faixa de 25 a 30% da tensão de ruptura do condutor, como tensão ideal para se controlar vibrações aeólicas. Estes limites levam em consideração não só o melhor valor para o auto-amortecimento, mas também o limite econômico em que é conveniente explorar este auto-amortecimento do condutor.

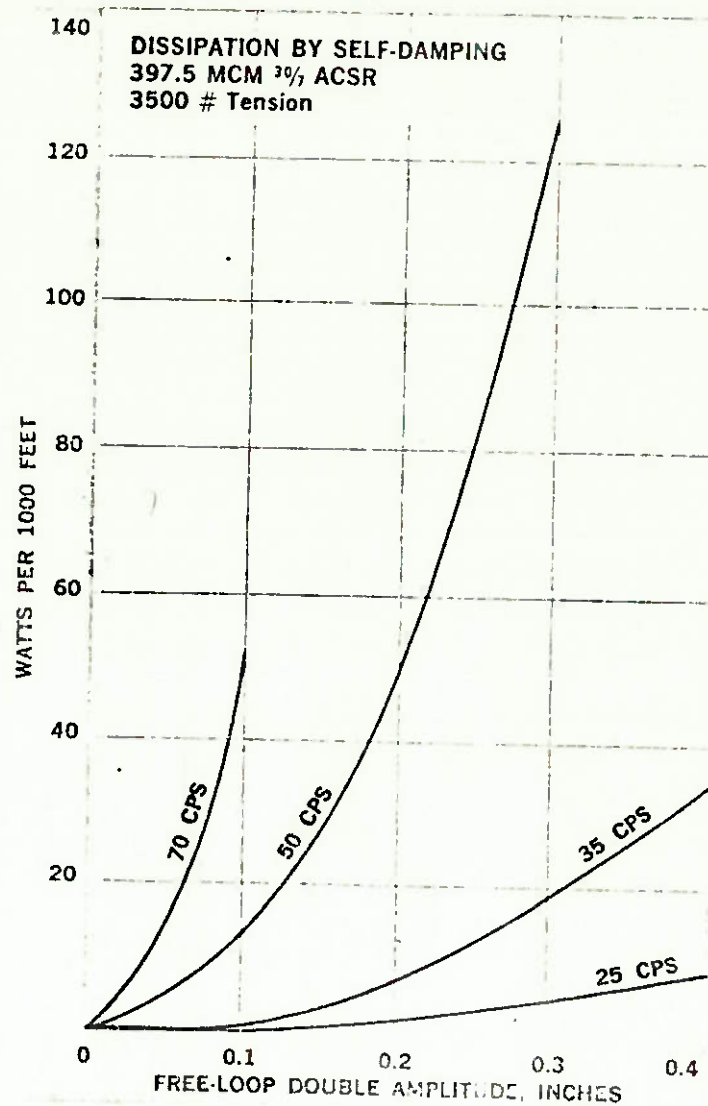


Figura 9 - (ref.1)- Dissipação de energia por auto-amortecimento.

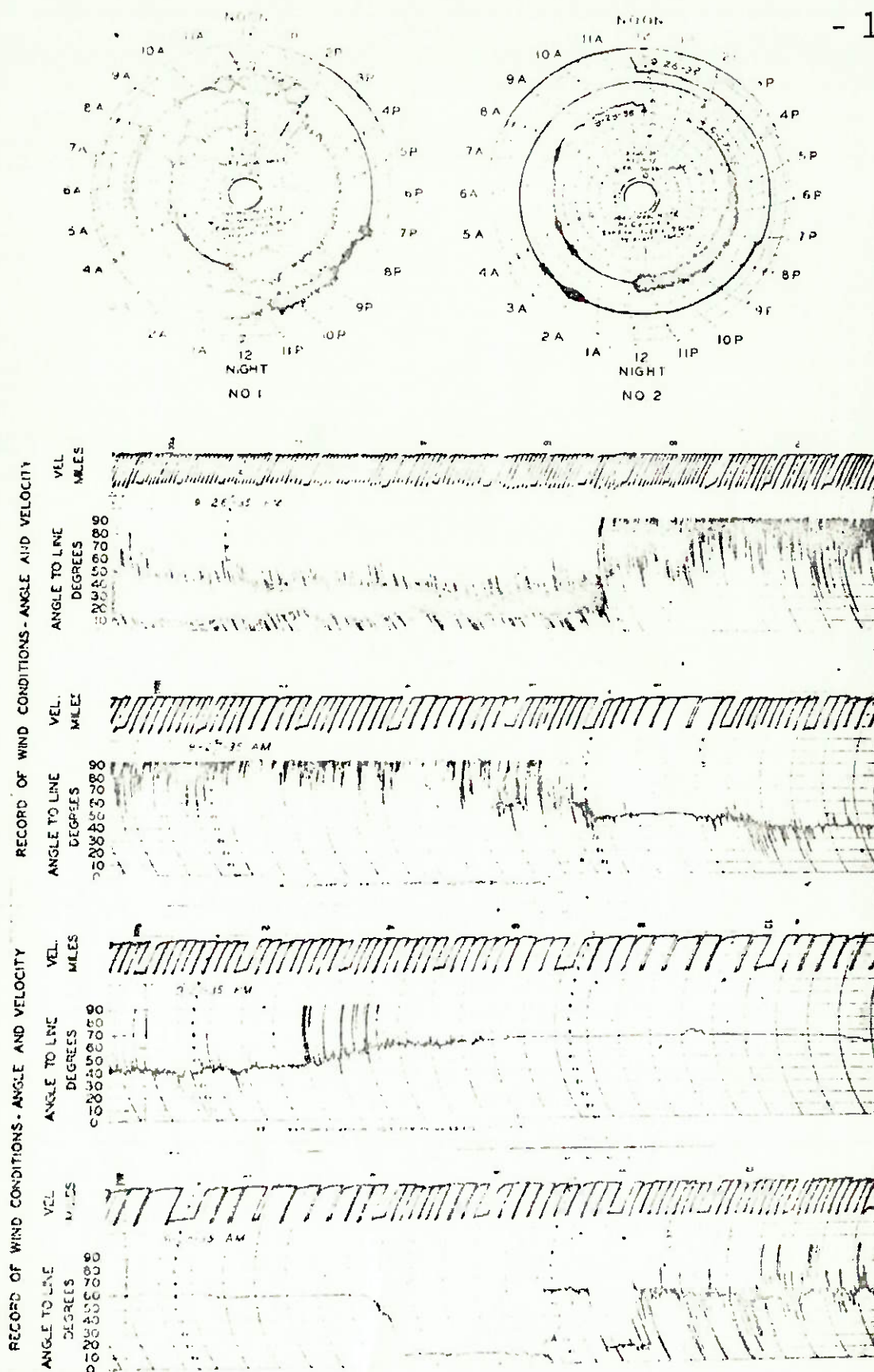


Figura 10.- (ref.1) - Auto amortecimento do condutor em função da tensão - nº1: para 7.100 lbs e nº2 para 4.250 lbs.

## 2. FREQUENCIA DAS VIBRAÇÕES AEOLICAS.

Experimentalmente verificou-se que existe uma relação definida entre a frequência  $f$ , o diametro do cilindro  $D$ , e a velocidade da corrente de ar, expressa pela fórmula:

$$\frac{f \cdot D}{V} = S \quad (1)$$

A fração é adimensional e é conhecida como número de Strouhal. Com exceção da constante  $S$ , esta fórmula pode ser derivada pela análise dimensional. Para cilindros lisos,  $S$  geralmente é tomado como um valor constante para números de Reynolds entre 1000 e 50.000.

Entretanto, abaixo de  $Re \approx 1.000$ , o número de Strouhal diminui rapidamente, ao passo que acima de  $Re \approx 10^5$ , este aumenta rapidamente.

Na figura 11 é apresentado um gráfico do número de Strouhal em função do número de Reynolds levantado em ensaios por A. Roshko (ref. 13). Os pontos obtidos experimentalmente foram obtidos para cilindros de diferentes diâmetros e diferentes velocidades  $V$ . Para números de Reynolds entre 1.000 e 100.000 o número de Strouhal permanece aproximadamente constante e igual a  $S=0,21$ .

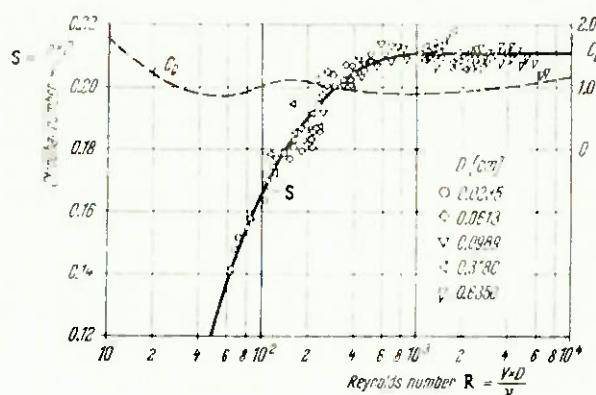


Figura 11 - (ref.13) - Número de Strouhal dado em função do número de Reynolds para cilindros circulares.

Para condutores traçados como os das linhas de transmissão aéreas, os limites para o aparecimento do fenômeno vibratório são reduzidos devido a rugosidade da superfície. A nova faixa situa os valores do número de Reynolds entre  $Re \approx 2.000$  e  $Re \approx 60.000$ .

### 3. FORÇAS SOBRE O CONDUTOR

#### 3.1. FORÇA DE ARRASTO -

Arrasto é definido como a componente da força, paralela a velocidade de aproximação do vento, que o fluido em movimento exerce sobre o corpo. As curvas do coeficiente



de arrasto  $C_{\Delta}$  dado em função do número de Reynolds, para cilindros circulares infinitamente longos, é mostrada na figura 12.

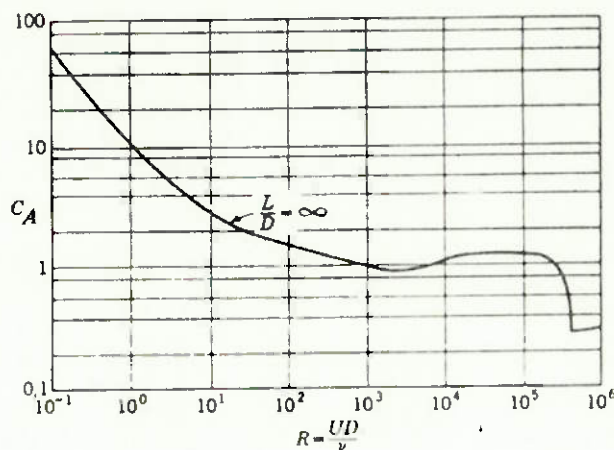


Figura 12 - (ref.12)-Coeficiente de arrasto para cilindros circulares.

Em cada caso, a força de arrasto é definida por:

$$F_{ar} = C_{\Delta} \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} \quad (2)$$

onde:

$\rho$  ..... densidade ( $\text{kg/m}^3$ )

$A$  ..... área transversal exposta ao fluxo ( $\text{m}^2$ )

$F_{ar}$  ..... força de arrasto ( $\text{kgf}$ )

$v$  ..... velocidade do fluido ( $\text{m/s}$ )

A área transversal exposta ao vento em um condutor é:

$$A = L.D \quad (3)$$

com

L..... comprimento do condutor (m)

D..... diametro do condutor(m)

Substituindo-se (3) em(2) obtemos:

$$F_{ar} = \frac{1}{2} \cdot C_{\Delta} \cdot \rho \cdot L \cdot D \cdot V^2 \quad (4)$$

### 3.2.FORÇA DE SUSTENTAÇÃO : (FORÇA KARMANIANA)

A força dada anteriormente pela expressão(4), age na direção paralela ao fluxo de ar, enquanto que as forças geradas pelos vórtices Kármánianos agem perpendicularmente ao mesmo. A formação alternada de vórtices nos lados do cilindro, provoca uma força harmonicamente variável sobre o mesmo na direção perpendicular a corrente.

A máxima intensidade desta força pode ser escrita de maneira analoga a (4) da seguinte maneira:

$$F_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot L \cdot D \cdot V^2 C_L \quad (5)$$

onde neste caso  $C_L$  é um coeficiente de sustentação.

A força vertical imposta sobre o condutor pelo vento é pequena, quando relacionada com o peso próprio do condutor. Força desta natureza não poderia causar dano ao condutor, a não ser sob condições de ressonância, quando a frequência da sua pulsação estiver relacionada por um número inteiro à frequência fundamental da catenária.

Torna-se necessário então definir um novo parâmetro  $r$  chamado de coeficiente de sincronização:

$$r = \frac{V}{V_s} \quad (6)$$

sendo  $V$  a velocidade do vento e  $V_s = \frac{f \cdot D}{S}$

A força de sustentação provocada pelo descolamento dos vórtices somente é sincronizada com a frequência de vi

bração  $f$  do condutor se  $r$  estiver compreendido entre 0,87 e 1,4. (ref.4)

Para um determinado valor de  $r$ , independentemente do diametro do condutor e de sua frequência de vibração; e para números de Reynolds na faixa de  $2 \cdot 10^3$  a  $6 \cdot 10^4$ , o valor de  $C_L$  (coeficiente de sustentação) é constante para cada razão  $U/D$  (razão entre amplitude de descolamento e o diametro do condutor).

Multiplicando-se e dividindo a expressão (5) por  $V_S^2$ , obtemos:

$$F_S = \frac{1}{2} \rho \cdot L \cdot D \frac{V^2 \cdot V_S^2 \cdot C_L}{V_S^2} \quad (7)$$

Lembrando que  $r = V/V_S$ , então  $r = V^2/V_S^2$  substituindo-se em (7) vem:

$$F_S = \frac{1}{2} \rho \cdot L \cdot D \cdot V_S^2 \cdot r^2 \cdot C_L$$

Portanto:

$$F_S = \frac{1}{2} \rho \cdot L \cdot D \cdot V_S^2 \cdot C_{Lr} \quad (8)$$

onde

$$C_{Lr} = C_L \cdot r^2$$



Para diversos valores de  $r$ , construiu-se o gráfico da figura 13 onde  $C_{Lr}$  e  $\delta$  (defasagem entre força de sustentação e deslocamento do cilindro) são dados como funções de  $U/D$ .

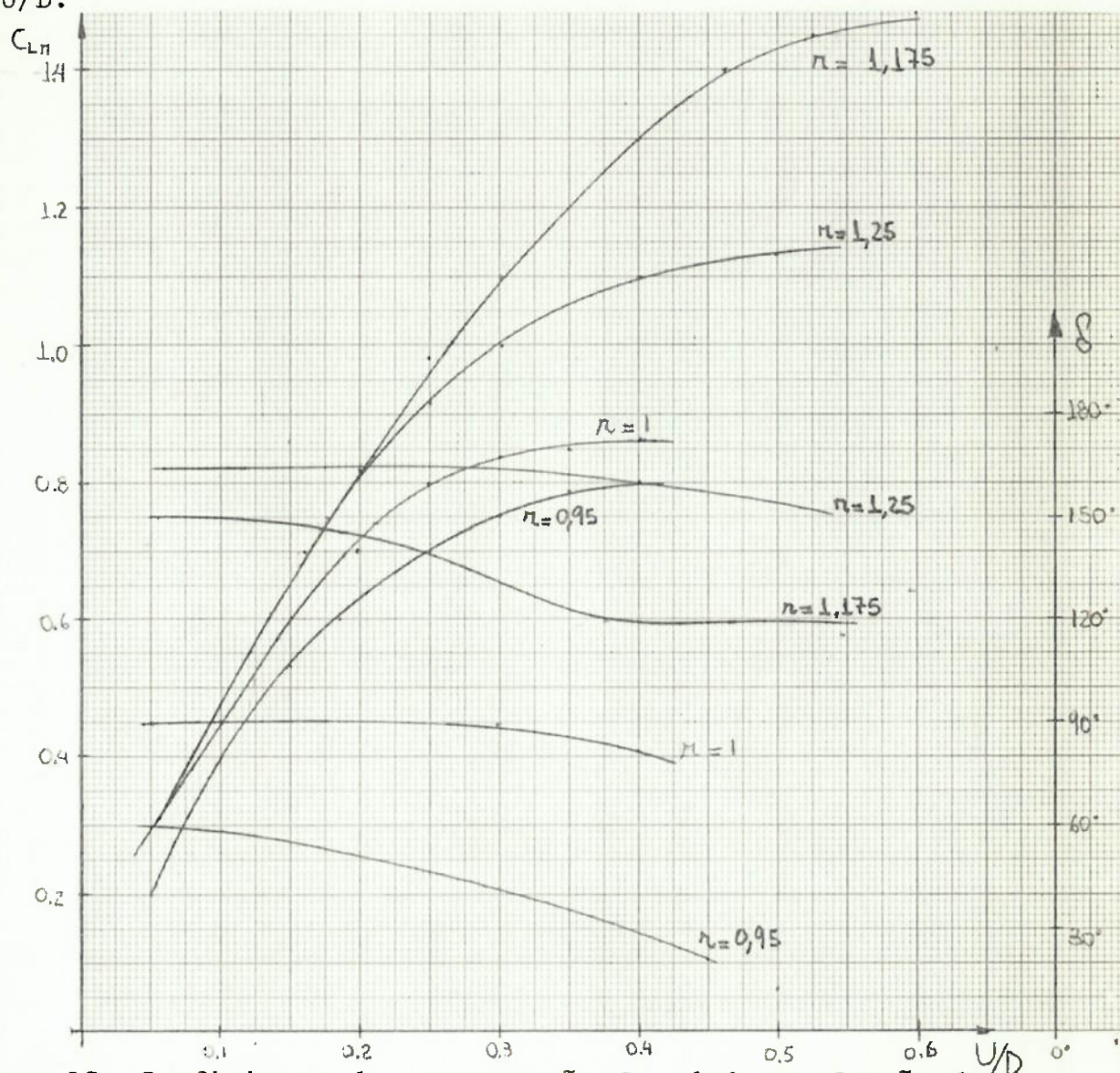


Figura 13: Coeficiente de sustentação  $C_{Lr}$  dado em função de  $U/D$  para diferentes valores de  $r$ .

Podemos construir ainda um gráfico de  $C_L$  em função de  $r$ , mostrando que o coeficiente de sustentação  $C_L$  será máximo quando a velocidade do vento for igual aquela correspondente a frequência de vibração do condutor.



Partindo-se do gráfico da figura 13, para alguns valores de  $U/D$  constroi-se este gráfico (figura 14):

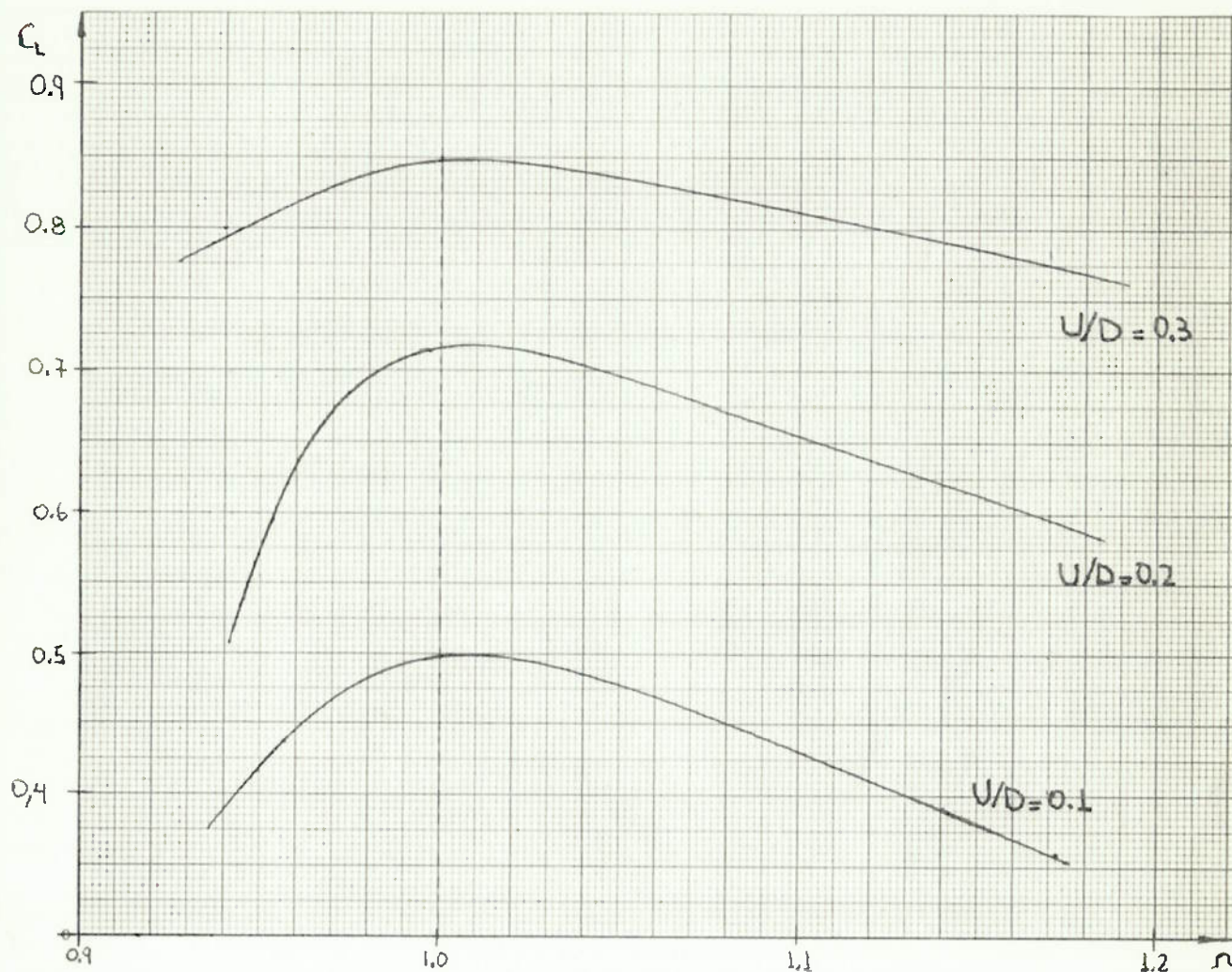


Figura 14 - Coeficiente de sustentação  $C_L$  dado em função de  $r = V/V_s$ .

Na prática prefere-se o uso de  $C_{Lr}$ , porque uma vez estabelecida a frequência de vibração, a força de sustentação resulta da expressão (8) onde  $C_{Lr}$  é uma função dada por  $U/D$  e  $r$ .

A expressão geral para a força de sustentação, assumindo-se um comportamento cosenoidal será:

$$F = F_s \cdot \cos wt \quad (10)$$

onde  $F_s$  é a máxima intensidade da força de sustentação dada pela expressão 8.

#### 4. ENERGIA INTRODUZIDA PELO VENTO.

A energia introduzida pelo vento em um condutor em um ciclo será:

$$\Delta E_{\text{ciclo}} = \int_{\text{ciclo}} F \cdot dx = \int_0^{2\pi/w} F \cdot \dot{x} dt \quad (11)$$

onde  $F$  é dada pela expressão (10) e  $x$  é o deslocamento do condutor dado por:

$$x(t) = U \cdot \cos (wt - \delta) \quad (12)$$

com  $\delta$  sendo a defasagem entre os valores da força e o deslocamento do condutor; daí :

$$\dot{x}(t) = -U \cdot w \cdot \sin (wt - \delta) \quad (13)$$

Levando-se as equações (10) e (13) na integral (11) obtemos:

$$\Delta E_{\text{ciclo}} = -U.F_s.w \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \cos wt.\text{sen}(wt - \delta) dt$$

Integrando vem:

$$\Delta E_{\text{ciclo}} = U.F_s.\pi.\text{sen } \delta \quad (14)$$

e assim, utilizando-se a expressão (8) :

$$\Delta E_{\text{ciclo}} = \frac{\pi}{2} \cdot \rho \cdot D.L.V_s^2.C_{Lr}.\text{sen } \delta \quad (15)$$

Utilizando-se o gráfico da figura 13, o valor máximo de  $C_{Lr}$  ; não levando em consideração  $r$ ; para valores de  $U/D$  na faixa de 0 a 0,3 pode ser expresso pela relação:

$$C_{Lr} = 4,5 \cdot \frac{U}{D} \quad (16)$$

A potência média por unidade de comprimento para um grande intervalo de tempo é:

$$W = \Delta E \cdot \frac{f}{L} \quad (17)$$

onde  $f$  é a frequência de vibração obtida na expressão (1):

$$f = 0,21 \frac{V_s}{D} \quad V_s = \frac{D \cdot f}{0,21} \quad (18)$$

Substituindo-se a expressão (18) e (16) em (15), vem:

$$\Delta E_{\text{ciclo}} = \frac{4,5 \cdot \pi}{2} \cdot \rho \cdot U^2 L \cdot \left( \frac{D \cdot f}{0,21} \right)^2 \sin \delta \quad (19)$$

e observando-se que para cada valor de  $U/D$ , o máximo valor de  $C_{Lr}$  corresponde a  $\delta=90^\circ$  (figura 13), substituindo-se (19) em (17) resulta;

$$W = \frac{4,5 \cdot \pi}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \left( \frac{D \cdot f}{0,21} \right)^2 \cdot f \quad (20)$$

A densidade do ar a  $20^\circ\text{C}$  é  $\rho=1,17 \text{ kg/m}^3$ .

Agrupando todos os coeficientes em uma constante, e reorganizando-se a expressão (20) resulta:

$$W = 161 \cdot U^2 \cdot D^2 \cdot f^3 \quad (21)$$

ou ainda:

$$\frac{W}{D^4 \cdot f^3} = 161 \cdot \frac{U^2}{D} \quad \frac{\text{watt/m}}{\text{m}^4 \cdot \text{cps}} \quad (22)$$

Chegamos a estas equações (21) e (22) fazendo-se uma importante simplificação introduzida pela expressão (16). Poderíamos obter uma expressão que nos forneça valores mais

precisos da potência média utilizando-se outra expressão, cuja potencia seja também função de  $C_{Lr}$  e  $\delta$ .  
As equações (21) e (22) neste caso seriam escritas da seguinte forma:

$$W = 35,8.D^3 f^3 . U . C_{Lr} . \text{sen } \delta \quad (21A)$$

ou ainda:

$$\frac{W}{D^4 . f^3} = 35,8 . \frac{U}{D} . C_{Lr} . \text{sen } \delta \quad (22A)$$

Partindo-se da equação (22), podemos construir em papel di-log um gráfico representativo da máxima potência introduzida pelo vento, tendo-se na abscissa os valores de  $U/D$  e na ordenada  $W/D^4 . f^3$ .

Da mesma maneira, a partir de valores de  $C_{Lr}$  e  $\rho$  tomados ponto a ponto do gráfico da figura 13, construiremos um gráfico para a expressão (22A), comparando com gráfico produzido a partir da equação (22).

Estas duas curvas são mostradas na figura 14.



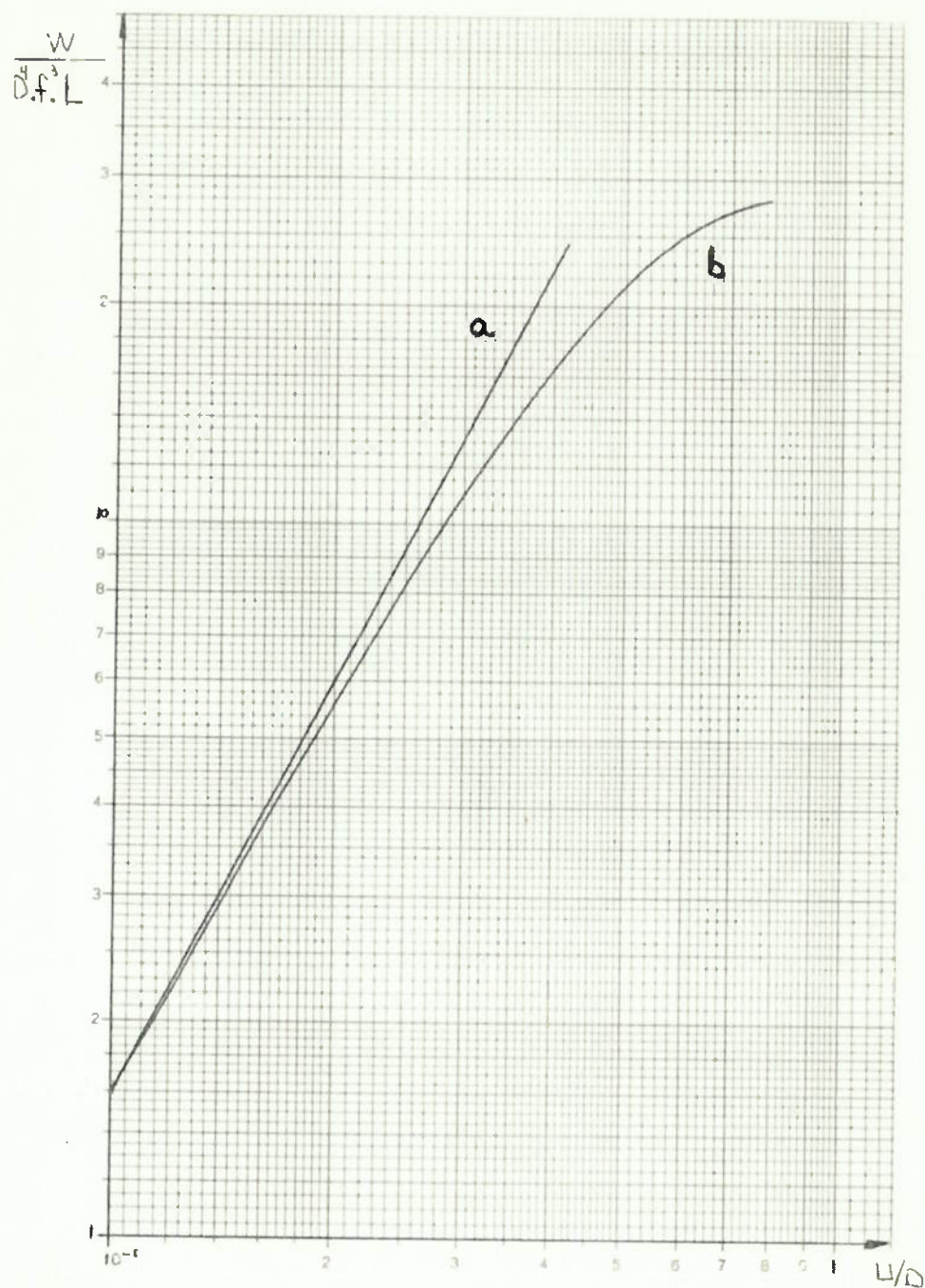


Figura 14 : Potência máxima introduzida pelo vento.

(a) Para a equação (22)

(b) Para a equação (22A)

## CAPITULO IV

### "DETERMINAÇÃO DA FREQUENCIA NATURAL E POTENCIA DISSIPADA POR UM CONDUTOR SOB TENSÃO"

#### 1. GENERALIDADES

Antes de passarmos ao estudo do comportamento dinâmico do amortecedor de vibrações tipo Stockbridge é importante determinar a resposta de um condutor sob tensão, a solicitações externas como as causadas pelo vento, de forma a permitir um estudo dos dispositivos criados para limitar a amplitude das vibrações.

#### 2. DETERMINAÇÃO DA FREQUENCIA NATURAL DO CONDUTOR.

Neste estudo vamos considerar o condutor como uma corda elástica, de massa uniformemente distribuída. O vínculo da corda a extremidade iremos considerar como um engastamento. A corda pode vibrar livremente no plano x-y, conforme mostra a figura 16.

A ordenada y da corda pode ser expressa em função de x e t por:

$$y = y(x,t) \quad (23)$$

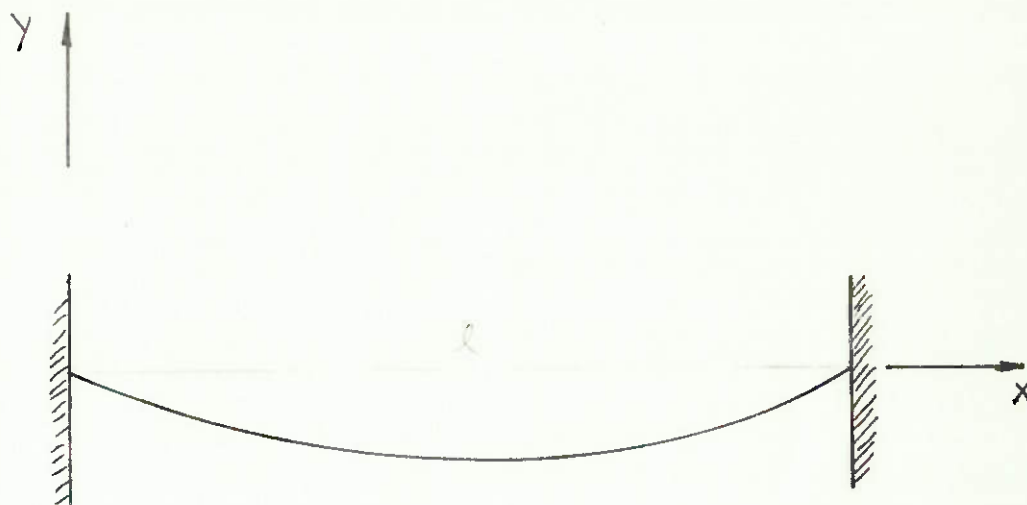


Figura 16.

Supondo agora esta corda sujeita a uma tensão  $F$  agindo axialmente, as componentes da força  $F$  que agem sobre um elemento  $dx$  da corda esticada são mostrados na figura 17.

Torna-se necessário fazermos uma simplificação importante. O sistema é considerado conservativo, e as únicas parcelas de energia que entram em jogo são a enérgia cinética e a energia potencial; esta última dividida em duas parcelas: a energia que a tensão  $F$  introduz na elongação da corda e a energia devido a flexão da corda.

A energia devida a flexão da corda não será levada em conta na determinação da frequência natural do condutor, visto que o erro cometido ao introduzirmos esta simplificação é da ordem de 5%.

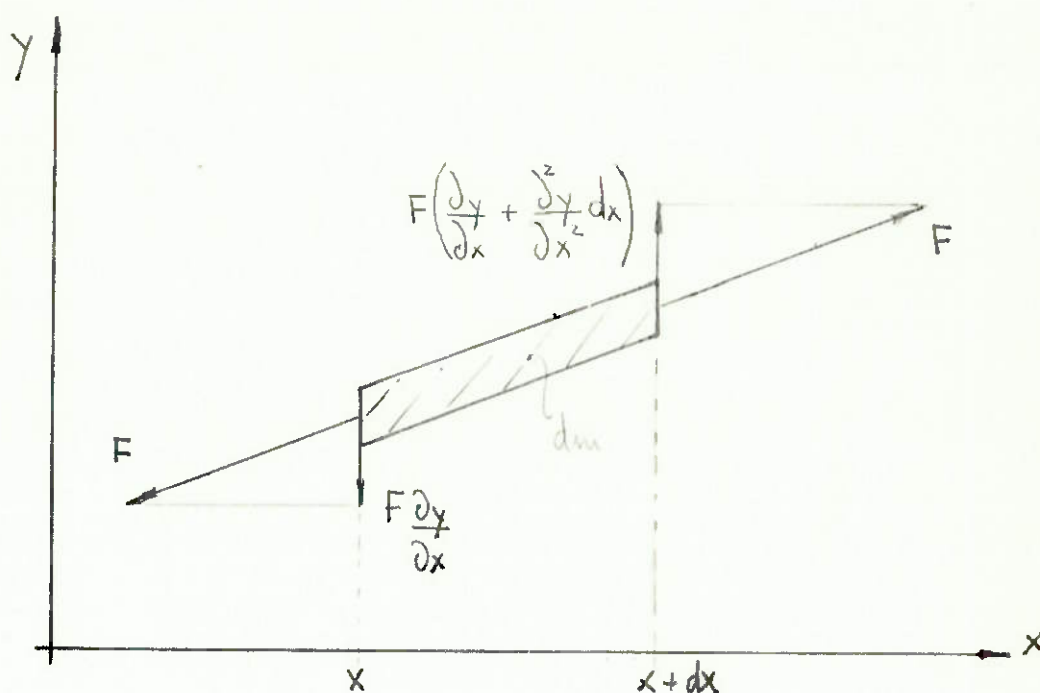


Figura 17 - Componentes verticais das tensões que agem sobre um elemento  $dx$  de uma corda esticada.

A massa do elemento  $dx$  é  $q dx$ , onde  $q$  é a massa da corda por unidade de comprimento; então:

$$dm = q \cdot dx$$

Considerando-se somente as componentes verticais da força  $F$  mostradas na figura 17, a equação diferencial para um elemento  $dx$  da corda é:

$$F \left( \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \right) - F \frac{\partial y}{\partial x} = q dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

daí:

$$F \frac{\partial y}{\partial x} + F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - F \frac{\partial y}{\partial x} = q dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Resulta :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{q}{F} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad (24)$$

As variáveis  $x$  e  $t$  são independentes, pois para cada frequência a forma da corda é sempre a mesma e todos os pontos movem-se em fase entre si, permitindo reescrever a equação (23) introduzindo uma separação de variáveis:

$$y_{(x,t)} = X(x) \cdot T(t)$$

Diferenciando-se  $X_{(x)}$  e  $T_{(t)}$ , resulta:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X'' \cdot T \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T'' \cdot X$$

Levando-se estas últimas equações, na equação diferencial da corda (equação 25) e fazendo  $c = \sqrt{F/q}$  vem:

$$X'' \cdot T - \frac{1}{c^2} \cdot T'' \cdot X = 0 \quad (26)$$



ou

$$c^2 \cdot \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = a \quad (27)$$

Onde a é uma constante. Podemos separar a equação 27 em duas equações diferenciais, uma função de x e outra função de t :

$$\left. \begin{aligned} X'' - \frac{a}{c^2} \cdot X &= 0 \\ T'' - aT &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Chamando-se  $a = -w^2$ , as equações em (28) resultam:

$$\left. \begin{aligned} X'' + \left(\frac{w}{c}\right)^2 \cdot X &= 0 \\ T'' + w^2 \cdot T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

cujas soluções são:

$$\left. \begin{aligned} X_{(x)} &= A \sin\left(\frac{w}{c}\right) \cdot x + B \cdot \cos\left(\frac{w}{c}\right) \cdot x \\ e \\ T_{(t)} &= C \cdot \sin wt + D \cos wt \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

assim substituindo-se na equação (25) :

$$y_{(x,t)} = \left[ A \cdot \sin \frac{w}{c} \cdot x + B \cos \frac{w}{c} \cdot x \right] \cdot (C \sin wt + D \cos wt)$$

(31)

onde A,B,C e D são constantes de integração e w é a frequência. O primeiro membro da equação (31) define a forma da corda, e o segundo membro seu movimento. Para determinarmos as constantes A, B, C e D, é necessário utilizar as condições de contorno:

1.<sup>a</sup> Condição: para  $x=0$ ;  $y=0$  (condição devida ao engastamento da corda em uma das extremidades)

$$0 = B \cdot (C \sin wt + D \cos wt) \quad (32)$$

2.<sup>a</sup> Condição: para  $x=L$ ;  $y=0$  (engastamento na extremidade oposta)

$$0 = \left[ A \sin \frac{wL}{c} + B \cos \frac{wL}{c} \right] \cdot (C \sin wt + D \cos wt)$$

(33)

Combinando as equações (32) e (33) resulta:

$$B = 0 \quad \text{e} \quad A \sin \frac{wL}{c} = 0$$

$$\text{como } A \neq 0 \quad \sin \frac{wL}{c} = 0$$

esta condição é verdadeira para :

$$\frac{wL}{c} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi \quad \text{que são as frequên-}$$

cias naturais de vibração:

$$\boxed{w = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{F/q}} \quad (34) \quad \text{onde } n=1,2,\dots,n \text{ repre}$$

senta o modo de vibrar.

Resta ainda determinar as constantes C e D. Fazendo-se a derivada parcial em relação ao tempo da equação (31), vem:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[ A \sin \frac{w \cdot x}{c} \right] \cdot \left( C \cos wt - D \sin wt \right) \cdot w$$

A terceira condição de contorno a ser imposta é para :  
 $t=0; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0$

Resulta que :

$$0 = \left( A \sin \frac{w}{c} \cdot x \right) \cdot \left( C \cos wt \right) \cdot w$$

Portanto  $C=0$ , visto que A e w são diferentes de zero, daí :

$$y(t) = A.D.\text{sen}\left(\frac{w}{c} \cdot x\right) \cdot \cos wt$$

e

$$y(t=0) = A.D.\text{sen} \frac{w}{c} \cdot x$$

A constante AD representa a máxima amplitude para y, que chamaremos de  $y_0$ . A solução fica sendo:

$$y = y_0 \cdot \text{sen} \frac{w}{c} \cdot x \cdot \cos wt$$

Portanto :

$$y = y_0 \cdot \text{sen} \frac{n\pi}{L} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{F}{q}} \cdot t\right) \quad (35)$$

A configuração da corda é definida por  $y_0 \text{sen} \frac{n\pi \cdot x}{L}$  e a maneira de vibrar é dada por  $\cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{F}{q}} \cdot t\right)$

### 3.DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DE ONDA

O comprimento de uma corda é definido pelo comprimento de uma onda senoidal  $\text{sen} \frac{n\pi \cdot x}{L}$  ; que é:

$$\frac{n\pi \lambda}{L} = 2\pi \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{2L}{n}$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda. Os tres primeiros modos de vibrar e seus respectivos comprimentos de onda são mostrados na figura 18.

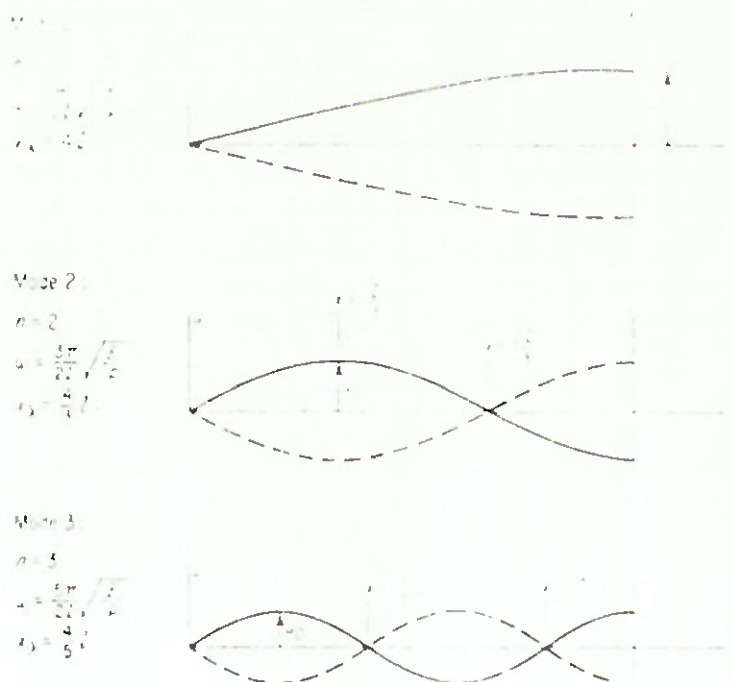


Figura 18 : Configuração dos tres primeiros modos principais de vibrar.

#### 4. DETERMINAÇÃO DA POTENCIA DISSIPADA PELO CONDUTOR

Um condutor trançado dissipa energia por histerese elástica. A energia dissipada por histerese elástica por um material em um ciclo independe da frequência.

A expressão geral da energia dissipada por histerese por um material é:

$$\Delta E_{\text{ciclo}} = \pi \cdot b \cdot K \cdot X^2 \quad (36)$$



onde  $X$  é a amplitude e  $b$  a constante de amortecimento histerético.

Em testes realizados em campo, foram levantados ' uma série de dados que são mostrados nos diagramas das figuras 19 e 20. Estes gráficos mostram que a energia dissipada por um condutor em um ciclo não depende da frequência e pode ser expressa pela seguinte relação:

$$E_n = C \cdot U^2 \cdot \lambda_n^{-3} \quad (37)$$

onde  $U$  é a amplitude de vibração no ventre e  $\lambda_n$  é o comprimento de onda no modo  $n$ -ésimo de vibrar.

A expressão (37) dá a energia dissipada em um ciclo na frequência natural  $n$ -ésima resulta analoga à expressão (36) visto que é proporcional a amplitude do deslocamento e independente da frequência.

Como resultados de estudos chegou-se a uma expressão para  $C$  dada por : (Ref-3)

$$C = \frac{\eta}{2} \cdot L \cdot H. \quad (38)$$

onde  $H$  é a constante de amortecimento histerético do condutor.

Levando-se a equação (38) na (37) vem:

$$E_n = \frac{\eta}{2} \cdot H \cdot U^2 \cdot \lambda_n^{-3} \cdot L$$

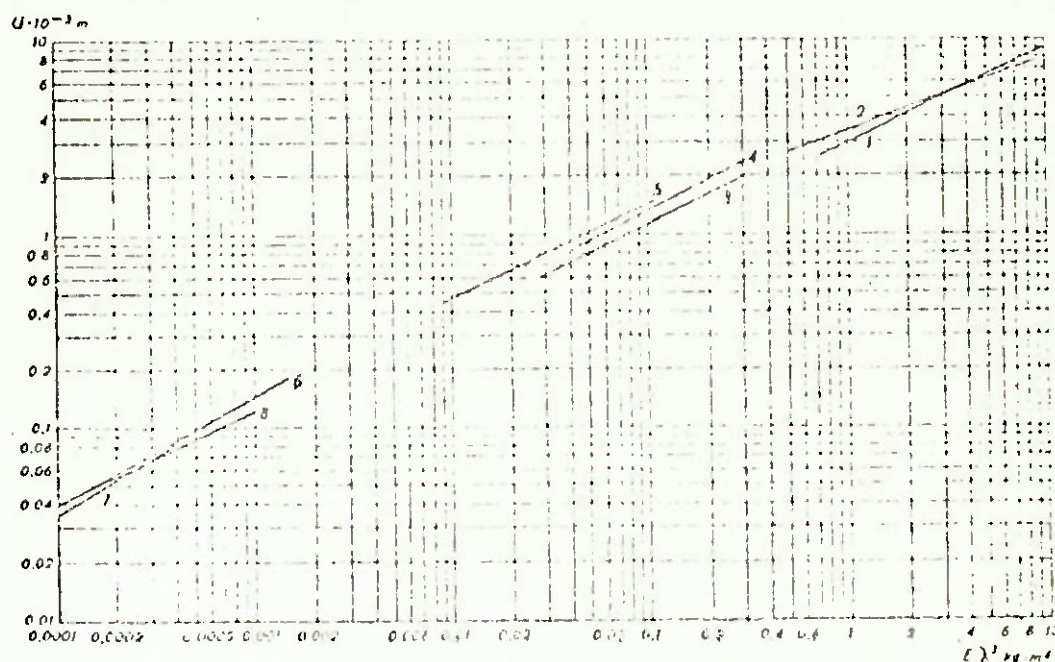


Figura 19: Energia dissipada por ciclo por um condutor com  $\phi$  27mm, em um vão de 46,4m.

CURVA	TENSÃO (kg)	FREQUENCIA (Hz)	COMPRIMENTO DE ONDA (m)
1	2.000	9	13
2	4.000	12	13
3	1.000	15	5,42
4	2.000	21,6	5,42
5	4.000	30	13
6	1.000	25,2	5,42
7	4.000	35,5	3,3
8	2.000	49,5	2,63

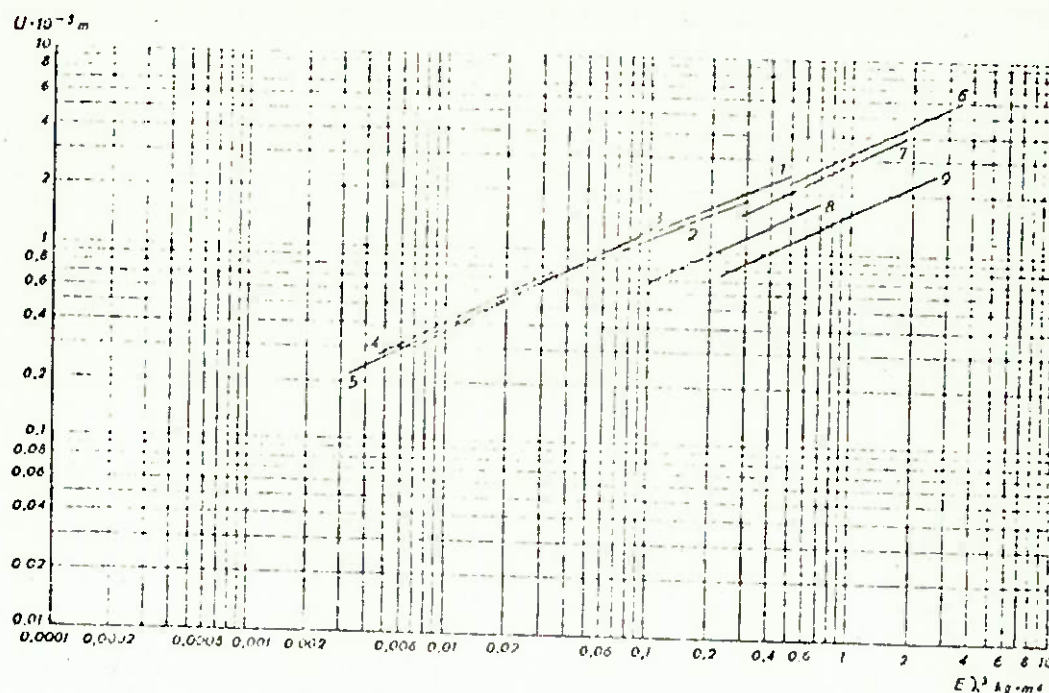


Figura 20 : Energia dissipada por ciclo por um condutor de  $\varnothing$  31,5mm, em um vão de 46,5 m.

CURVA	TENSÃO (kg)	FREQUENCIA (Hz)	COMPRIMENTO DE ONDA (m)
1	3.000	11,75	10,35
2	3.000	17,05	7,75
3	3.000	19,86	6,21
4	4.000	28,9	4,90
5	4.000	42,7	3,33
6	5.000	15,01	10,35
7	5.000	32,46	4,90
8	3.000	6,68	18,64
9	5.000	5,16	31,06

Chamando de coeficiente de amortecimento histerético a relação:

$$h_n = H \cdot \lambda_n^{-3}$$

Note-se que para cada modo de vibrar temos um coeficiente  $h_n$  diferente; isto é, para cada frequência de vibração  $h_n$  é proporcional ao correspondente comprimento de onda.

Quando um condutor vibra, a uma mesma amplitude com comprimento de onda menor, dissipa mais energia, o que é intuitivo, pois para comprimentos de onda menores temos maiores deformações no condutor.

A potencia média dissipada por um condutor em um grande intervalo de tempo é dada por :

$$W = E_n \cdot f \quad (39)$$

Portanto :

$$W = \frac{\pi}{2} \cdot H \cdot U^2 \cdot \lambda_n^{-3} \cdot L \cdot f \quad (40)$$

O valor de  $H$  é função do diametro do condutor e da tensão de ruptura  $\sigma_a$ .

## CAPITULO V

### "DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DINAMICAS DE UM AMORTECEDOR TIPO STOCKBRIDGE."

#### 1. GENERALIDADES

Como foi visto em capítulos anteriores, as vibrações aeólicas podem provocar a ruptura de condutores por fadiga. A energia introduzida pelo vento em um condutor é dissipada em parte pelo amortecimento histerético do condutor; entretanto para a maioria dos condutores empregados em linhas de transmissão, a constante de amortecimento histerético  $H$  (equação 38) não é suficientemente elevada para impedir que a amplitude de vibração das linhas alcancem valores perigosos.

Par manter a amplitude destas vibrações dentro de intervalos toleráveis pelo condutor, podem ser adotados dois procedimentos: diminuir o comprimento da onda e sua frequência de ressonância diminuindo-se a tensão a qual o condutor está sujeito, ou então introduzir um amortecimento externo ao condutor utilizando-se um amortecedor de vibrações.

Escolheu-se para o estudo um amortecedor tipo Stockbridge, descrito mais adiante, por ser o mais tradicional e de construção mais simples.

#### 2. DESCRIÇÃO DO AMORTECEDOR STOCKBRIDGE.

O amortecedor Stockbridge é largamente utilizado em linhas de transmissão, desenvolvido a partir de 1925 por E. H. Stockbridge. Consiste basicamente de duas massas chamadas ca-



lotas (de ferro fundido ou zinco) fixadas rigidamente às extremidades de um cabo de aço pré-formado ligado no seu ponto médio ao condutor (figura 21).

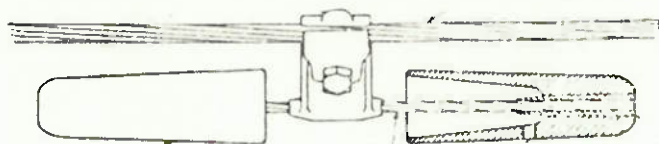


Figura 21 - Vista lateral e corte de um amortecedor Stockbridge.

### 3. DETERMINAÇÃO DA FREQUENCIA DE RESSONANCIA DE UM AMORTECEDOR STOCKBRIDGE.

De acordo com o que foi visto no capítulo IV, o condutor é sujeito a vibrações verticais, e portanto as calotas do amortecedor são forçadas a vibrar somente no plano vertical.

Vamos inicialmente calcular as frequências naturais do amortecedor, não considerando o amortecimento por histerese e lástica no cabo do amortecedor.

Considerando uma perfeita simetria entre as duas calotas do amortecedor, limitaremos o estudo a somente uma das partes que vamos supor engastada em uma extremidade e livre na outra para vibrar, onde está localizada a calota (figura 22).

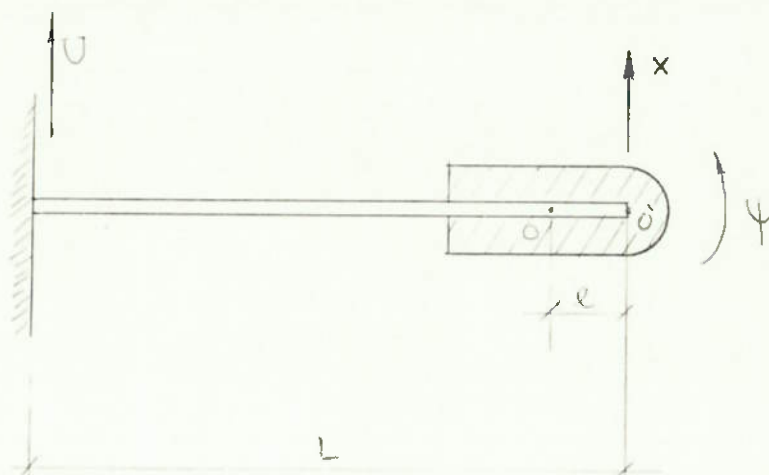


Figura 22 - Esquema de uma metade do amortecedor Stockbridge.

Com referência a figura 22 utilizaremos as seguintes notações:

- $O'$ .....ponto de engastamento da calota do amortecedor
- $O$  .....centro de massa da calota
- $m$  .....massa da calota
- $J_a$ .....momento de inércia da calota em relação ao ponto  $O'$  de engastamento da calota.
- $J_o$ .....momento de inércia da calota em relação a seu centro' de massa  $O$ .
- $L$ .....comprimento do cabo de aço pré-formado(mensageiro)
- $e$ .....distancia entre os pontos  $O'$  e  $O$
- $x$ .....deslocamento vertical de  $O'$
- $x_o$ .....deslocamento vertical de  $O$
- $\psi$ .....rotação da calota.

Antes de passarmos ao equacionamento, vamos determinar as constantes de rigidez do cabo de aço, para duas condições:

deslocamento unitário do ponto  $O'$  sem rotação em torno deste ponto (figura 23); e rotação unitária em torno de  $O'$  sem deslocamento do ponto  $O'$  (figura 24)

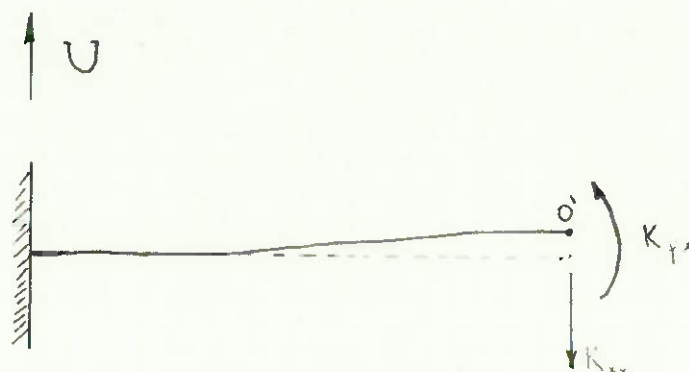


Figura 23: Deformação do cabo para  $x=1$  e  $\psi=0$

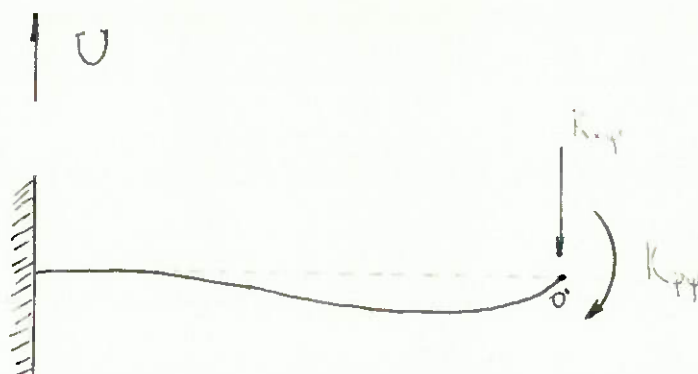
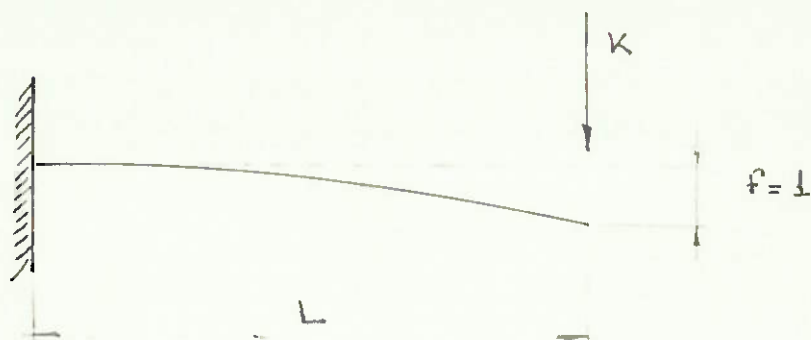


Figura 24: Deformação do cabo para  $x=0$  e  $\psi=1$

A rigidez  $K$  de um cabo é definida como sendo a força que deve-se aplicar a extremidade livre do cabo para obtermos um deslocamento unitário do ponto  $O'$ . A expressão para  $K$  neste caso pode ser obtida através da resistência dos materiais supondo o cabo uma viga engastada homogênea:



$$\dots K = 3 \frac{E_m \cdot J_m}{L^3} \quad (41)$$

onde :  $E_m$  é o modulo de elasticidade do cabo e  $J_m$  é o momento de inércia do cabo,

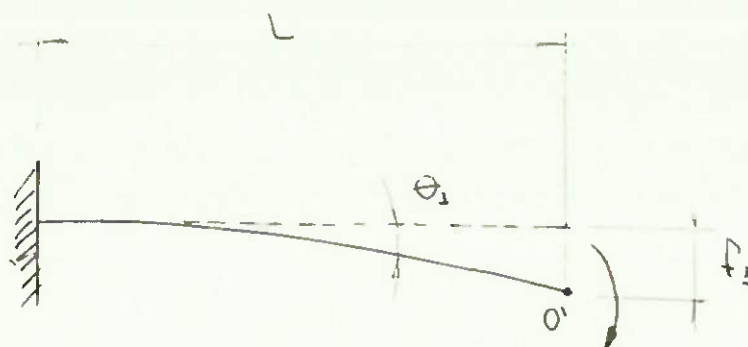
A partir deste valor de  $K$  (equação 41) podemos de terminar os valores de  $K_{xx}$ ,  $K_{\psi x}$ ,  $K_{x\psi}$  e  $K_{\psi\psi}$  indicados nas figu ras 22 e 23.

Para o primeiro caso (figura 22) deformando-se o cabo para  $x=1$  e  $\psi=0$ , definimos:

$K_{xx}$ .....força de reação elástica em  $O'$  na direção de  $x$  devi da a um deslocamento  $x$  unitário da secção do ponto ' $O'$  com rotação  $\psi = 0$

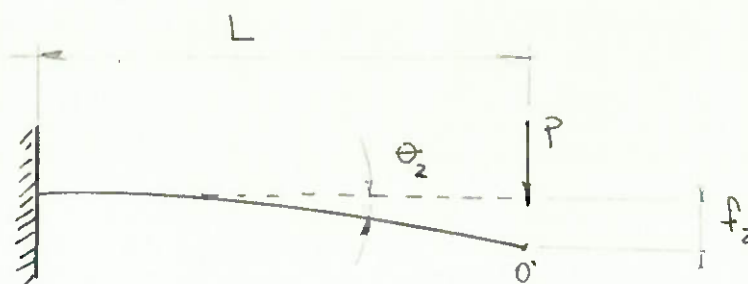
$K_{\psi x}$ .....momento de reação elástica em  $O'$  devido a um deslo camento unitário de  $x$  da secção de engastamento  $O'$  com rotação  $\psi = 0$

Sabemos da resistencia dos materiais que: apli- cando-se um momento  $M$  na extremidade  $O'$  de uma viga engastada aparecem uma flecha  $f_1$  e um angulo  $\theta_1$  conforme indicados a se guir, dados por:



$$\theta_1 = \frac{ML}{EJ} \quad \text{e} \quad f_1 = \frac{ML^2}{2EJ}$$

da mesma forma, aplicando-se uma carga  $P$  na extremidade livre  $O'$  resultam as flechas  $f_2$  e um ângulo  $\theta_2$  dados por:



$$\theta_2 = \frac{PL^2}{2EJ} \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{PL^3}{3EJ}$$

as condições neste caso são:

$$\begin{cases} \theta = \theta_1 + \theta_2 = 0 \\ f_1 + f_2 = 1 \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} M &= -K \psi_x \\ P &= K_{xx} \end{aligned}$$



resulta que:

$$\theta_1 = -\theta_2 \quad \frac{K_{\psi x} \cdot L}{EJ} = \frac{K_{xx} \cdot L^2}{2EJ}$$

$$\therefore K_{\psi x} = \frac{K_{xx} \cdot L}{2}$$

impondo-se a condição  $f_1 + f_2 = 1$ , vem:

$$- \frac{K_{xx} \cdot L^3}{4EJ} + \frac{K_{xx} \cdot L^3}{3EJ} = \frac{KL^3}{3EJ}$$

$$\frac{K_{xx} \cdot L^3}{12EJ} = \frac{KL^3}{3EJ}$$

$$K_{xx} = 4K$$

(42)

e

$$K_{\psi x} = 2KL$$

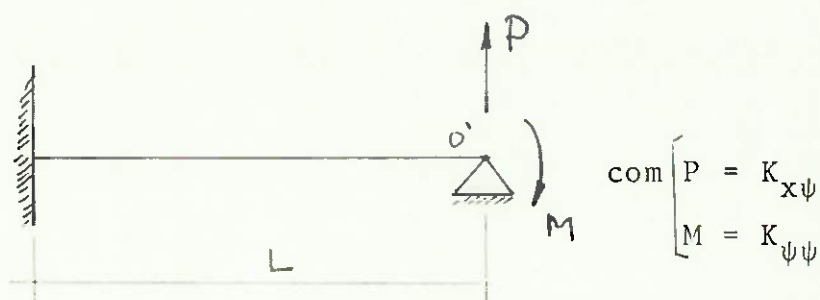
(43)

Para o segundo caso (figura 23) deformando-se o cabo com  $x=0$  e  $\psi=1$ , definimos por:

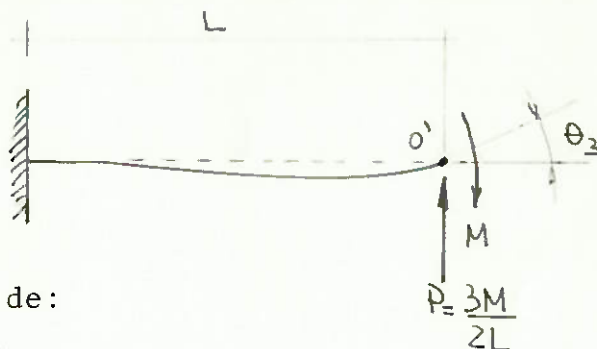
$K_{x\psi}$  .....força de reação elástica em  $O'$  na direção de  $x$  devido a uma rotação  $\psi$  unitária da secção  $O'$  com  $x=0$ .

$K_{\psi\psi}$  ..... momento de reação elástica em  $O'$  devido uma rotação  $\psi$  unitária da secção  $O'$  com  $x=0$

Da resistencia dos materiais, podemos considerar  $O'$  como um vinculo conforme esquema abaixo:



Substituindo-se a reação de apoio e a força por:



resulta um angulo de:

$$\theta = \frac{ML}{EJ} - \frac{PL^3}{2EJ}$$

como a condição neste caso é que  $\theta = 1$  vem :

$$1 = \frac{ML}{2EJ} - \frac{3M}{2L} \cdot \frac{L}{2EJ} = \frac{ML}{EJ} - \frac{3ML}{4EJ}$$

$$1 = \frac{1}{4} \frac{ML}{EJ} \implies M = \frac{4EJ}{L}$$

Portanto :

$$K_{\psi\psi} = 4 \frac{KL^3}{3} \cdot \frac{1}{L}$$

$$K_{\psi\psi} = \frac{4}{3} KL^2 \quad (44)$$

e

$$P = K_{x\psi} = \frac{3M}{2L}$$

$$K_{x\psi} = 2KL \quad (45)$$

### 3.1. DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.

Vamos determinar as equações de equilíbrio da ca'  
lota (contrapeso) na direção x para os pontos O (centro de ma  
sa) e O' (ponto de engastamento da calota do amortecedor) para  
uma posição genérica do amortecedor conforme mostra a figura'  
25.

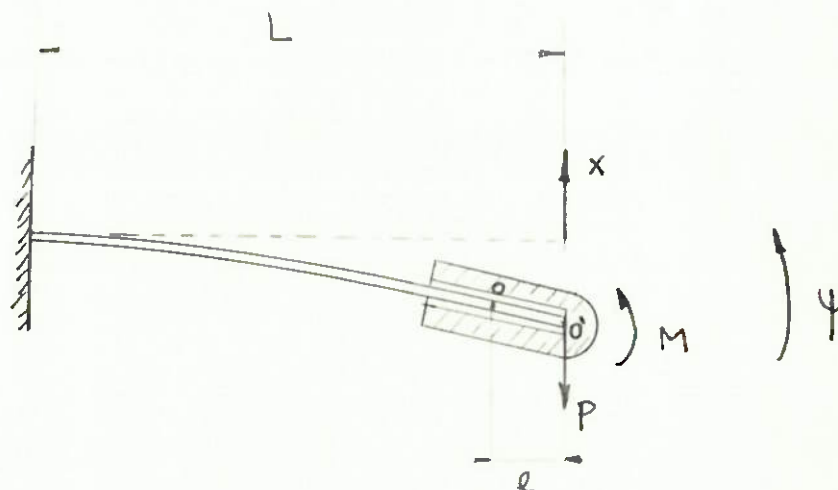


Figura 25: Esquema de forças em uma metade do amortecedor  
Stockbridge.

Utilizando a mesma notação das figuras 23 e 24 temos:

. Equações em relação ao ponto O:

$$(46) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_O + K_{xx} \cdot x - K_{x\psi} \cdot \psi = 0 & (A) \\ -J_O \ddot{\psi} + K_{\psi x} \cdot x - K_{\psi\psi} \cdot \psi - K_{xx} \cdot x \cdot \ell + K_{x\psi} \cdot \psi \cdot \ell = 0 & (B) \end{cases}$$

. Equações em relação ao ponto O':

$$\text{Temos que} \quad \ell \dot{\psi} = \dot{x} - \dot{x}_O = \dot{x}_O \Rightarrow \dot{x} = \dot{\psi} \cdot \ell$$

levando-se na equação 46A resulta

$$m\ddot{x} - m\ell \cdot \ddot{\psi} + K_{xx} \cdot x - K_{x\psi} \cdot \psi = 0 \quad (47A)$$

para a equação 46B, lembrando que:

$$J_O \cdot \ddot{\psi} = J_a \cdot \ddot{\psi} - m\ell^2 \ddot{\psi}$$

Substituindo-se vem:

$$-J_a \ddot{\psi} - m\ell^2 \ddot{\psi} - (K_{xx} \cdot x - K_{x\psi} \cdot \psi) \cdot \ell + K_{\psi x} \cdot x - K_{\psi\psi} \cdot \psi = 0$$

da equação 46A tiramos que

$$(K_{xx} \cdot x - K_{x\psi} \cdot \psi) = -m\ddot{x} + m\ell \ddot{\psi}$$

Portanto ficamos com

$$-J_a \ddot{\psi} + m\ell^2 \ddot{\psi} + m\ddot{x}\ell - m\ell^2 \ddot{\psi} + K_{\psi x} \cdot x - K_{\psi\psi} \cdot \psi = 0$$

$$- J_a \ddot{\psi} + m \ddot{x} \ell + K_{\psi x} \cdot x - K_{\psi \psi} \cdot \psi = 0 \quad (47B)$$

### 3.2. CÁLCULO DA FREQUENCIA DE RESSONANCIA.

Vamos pesquisar para as equações 47A e B soluções do tipo:

$$(48) \quad \begin{aligned} x &= X \cdot e^{i\omega t} = X (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ \psi &= \phi \cdot e^{i\omega t} = \phi (\cos \omega t + i \sin \omega t) \end{aligned}$$

para x e  $\psi$  em fase. Derivando-se as equações em (48) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega X (-\sin \omega t - i \cos \omega t) \\ \ddot{x} &= -\omega^2 X (\cos \omega t + i \sin \omega t) \end{aligned}$$

Portanto resulta:

$$(49) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 X e^{i\omega t} \\ \ddot{\psi} = -\omega^2 \phi e^{i\omega t} \end{cases} \quad (\text{deduzido de maneira analoga a x})$$

Substituindo-se estas equações 49 na equação 47A vem:

$$-m\omega^2 X e^{i\omega t} + m\ell \cdot \omega^2 \phi e^{i\omega t} + K_{xx} \cdot X e^{i\omega t} - K_{x\psi} \cdot \phi e^{i\omega t} = 0$$

Além disso  $K_{xx} = 4K$  e  $K_{x\psi} = 2KL$ , portanto resulta:

$$-m\omega^2 X + m\ell \omega^2 \phi + 4KX - 2KL\phi = 0 \quad (50)$$



Substituindo-se agora na equação 47B :

$$J_a \cdot w^2 \cdot \phi \cdot e^{iwt} - m\ell X \cdot w^2 \cdot e^{iwt} - K_{\psi\psi} \cdot \phi \cdot e^{iwt} + K_{\psi X} \cdot X \cdot e^{iwt} = 0$$

com  $K_{\psi X} = 2KL$  e  $K_{\psi\psi} = \frac{4}{3} KL^2$  , vem

$$J_a \cdot w^2 \phi - m\ell w^2 X - \frac{4}{3} \cdot KL^2 \phi + 2KL \cdot X = 0 \quad (51)$$

Isolando-se os termos em  $\phi$  e  $X$  das equações 50 e 51 resulta:

$$(52) \quad \begin{cases} X(mw^2 - 4K) + \phi (2KL - m\ell w^2) = 0 \\ X(2KL - m\ell w^2) + \phi (J_a \cdot w^2 - \frac{4}{3} KL^2) = 0 \end{cases}$$

Para que existam soluções do tipo admitido em (48) é necessário que as equações (52) sejam satisfeitas. É possível escolhermos valores apropriados para  $w$  e  $X/\phi$  de tal forma que as equações em (52) sejam satisfeitas e as equações (48) sejam as soluções. Para isso, vamos determinar as relações  $X/\phi$  para ambas as equações em (52) :

$$\frac{X}{\phi} = \frac{m\ell w^2 - 2KL}{mw^2 - 4K} \quad (53A)$$

e

$$\frac{X}{\phi} = \frac{J_a w^2 - 4/3 KL^2}{m\ell w^2 - 2KL} \quad (53B)$$

Para que o sistema seja satisfeito é necessário que:

$$\frac{m\ell w^2 - 2KL}{mw^2 - 4K} = \frac{J_a w^2 - 4/3 KL^2}{m\ell w^2 - 2KL}$$

Desenvolvendo:

$$(m\ell w^2)^2 + (2KL)^2 - 2 \cdot 2KLm\ell w^2 = J_a \cdot w^4 m - \frac{4}{3} \cdot KL^2 m w^2 - 4KJ_a w^2 + \frac{16}{3} K^2 L^2 = 0$$

Agrupando-se os termos em  $w^4$  e  $w^2$  resulta:

$$w^4 (m\ell^2 - m J_a) + w^2 \left( \frac{4}{3} mKL^2 + 4KJ_a - 4KLm\ell \right) - \frac{4}{3} K^2 L^2 = 0$$

partindo-se desta última equação vem que as frequências naturais  $w_1$  e  $w_2$  para o sistema são dadas por:

$$w_{1,2}^2 = 2K \cdot \frac{\left( \frac{1}{3} L^2 m + J_a - L \cdot \ell m \right) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{3} L^2 m + J_a - L \cdot \ell m \right)^2 - \frac{1}{3} L^2 (mJ_a - \ell^2 m^2)}}{mJ_a - m^2 \cdot \ell^2} \quad (54)$$

Observando-se a equação (54) nota-se que aumentando o valor de  $\ell$ , ou seja a distancia entre o centro de massa e o ponto de engastamento da calota do amortecedor, as frequências naturais do amortecedor podem ser aproximadas, em contrapartida reduz-se a faixa de frequências cobertas pelo amortecedor.

#### 4. ANALISE DOS DOIS MODOS PRINCIPAIS DE VIBRAR

Neste item vamos analisar o amortecedor sob a influência de deslocamento do condutor, considerando no equacionamento o amortecimento por histerese do cabo mensageiro, para os dois modos fundamentais de vibrar.

#### 4.1. PRIMEIRO MODO DE VIBRAR:

Obtivemos na equação 54, os valores das frequências naturais. Estes valores satisfazem a equação 53, que ao ser substituído nesta o valor de  $w$ , iremos obter uma relação do tipo:

$$\psi = \alpha \cdot x \quad (55)$$

com  $\alpha$  um valor constante dependendo somente das características geométricas e do valor de  $K$ . Levando-se na equação de equilíbrio do ponto O (46A) vem:

$$m\ddot{x}_O + K_{xx} \cdot x - K_{x\psi} \cdot \psi = 0$$

$$m\ddot{x}_O + K_{xx} \cdot x - K_{x\psi} \cdot \alpha \cdot x = 0$$

Sabemos que :  $x = \frac{x_O}{1 - \alpha \ell}$

Portanto resulta a equação:

$$m\ddot{x}_O + x_O \cdot \left( \frac{K_{xx} - K_{x\psi} \cdot \alpha}{1 - \alpha \ell} \right) = 0 \quad (56)$$

No primeiro modo de vibrar o contrapeso em O está sujeito a grandes deslocamentos e pequenas rotações, portanto podemos considerar o valor entre parenteses na equação 56 como sendo  $K$ .

Considerando-se que o deslocamento do vínculo (o mesmo que o condutor) seja da forma  $u = U \cdot \sin \Omega t$  e introduzindo-se a parcela do amortecimento histerético na equação (56) vem:

$$m\ddot{x}_O + K(x_O - u) + \frac{h}{\Omega} \cdot (\dot{x}_O - \dot{u}) = 0 \quad (57)$$

Experimentalmente verificou-se que a constante  $h$  é do tipo  $h=C/L^3$ , conforme foi mostrado no capítulo IV. Desenvolvendo-se a equação 57 e adotando-se a notação  $x_0=x$  obtemos:

$$m\ddot{x} + Kx + \frac{h}{\Omega} \dot{x} = Ku + \frac{h}{\Omega} \dot{u} \quad (58)$$

Sabe-se que  $u=U \sin \Omega t$ , portanto vem:

$$\dot{u} = U \Omega \cos \Omega t$$

Substituindo-se em (58) vem:

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\Omega} \dot{x} + Kx = \frac{h}{\Omega} U \Omega \cos \Omega t + K.U \sin \Omega t$$

Pode-se escrever a equação da seguinte maneira:

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\Omega} \dot{x} + Kx = U \sqrt{h^2 + K^2} \cdot \sin (\Omega t + \beta) \quad (59)$$

$$\text{onde } \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{K} = \mu$$

Deve-se resolver a equação 59, que é do tipo :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_0 \sin (\Omega t + \beta)$$

cuja solução particular é:

$$x_p = A \sin (\Omega t + \beta - \xi)$$

com  $A$  e  $\xi$  dados por:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{2 \rho r}{1 - r^2} \quad \text{e} \quad A = \frac{P_0}{K} \cdot \left[ (1 - r^2)^2 + (2 \rho r)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{e} \quad r = \frac{\Omega}{w} \quad ; \quad \rho = \frac{c w}{2 \Omega}$$

Resolvendo-se da mesma maneira a equação 59, chamando de :

$$r = a_1 = \frac{\Omega}{w_1} \quad \text{e} \quad 2 \rho r = \mu = \frac{h}{K}$$

onde  $w_1$  é a frequência natural do sistema, resulta:

$$x = X \operatorname{sen} (\Omega t + \beta - \xi_1) \quad (60)$$

$$\text{com } \xi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\mu}{1 - a_1^2} \quad (61)$$

$$\text{e} \quad X = U \cdot \left[ \frac{1 + \mu^2}{(1 - a_1^2)^2 + \mu^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

O valor de X representa a amplitude do deslocamento do centro de massa O em função da amplitude do deslocamento U do vínculo, considerando o coeficiente de amortecimento  $\mu$  e a relação entre a frequência da oscilação do condutor com a de ressonância do amortecedor.

A força que o amortecedor transmite ao vínculo' (condutor) é dada por:



$$F_{am_1} = - 2m\ddot{x} \quad (63)$$

$$\text{com } \ddot{x} = - \Omega^2 \cdot U \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{(1-a_1^2)^2 + \mu^2}} \cdot \text{sen} (\Omega t - \alpha_1) \quad (64)$$

$$\text{onde } \alpha_1 = \xi_1 - \beta$$

o trabalho desenvolvido em um ciclo é dado por:

$$T_1 = 2 \int_0^T \frac{h}{\Omega} \cdot (\dot{x} - \dot{u})^2 dt \quad (65)$$

$$\text{com } \dot{x} = X \Omega \cos (\Omega t - \alpha_1)$$

$$\text{e } \dot{u} = U \Omega \cos \Omega t$$

Integrando temos:

$$T_1 = 2 \cdot U^2 h \pi \cdot N \quad (66)$$

onde:

$$N = 1 + \frac{1 + \mu^2}{\mu^2 + (1-a_1^2)^2} - 2 \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{\mu^2 + (1-a_1^2)^2}} \cos \alpha_1 \quad (67)$$

A potência média dissipada em um ciclo vale:

$$P_m = T_1 \cdot f \quad (68)$$

como  $f = \Omega/2\pi = a_1 w_1/2\pi$  que substituindo-se em 68 vem :

$$P_m = U^2 \cdot h \cdot w_1 \cdot a_1 \cdot N \quad (69)$$

com N dado pela equação 67.

#### 4.2. SEGUNDO MODO DE VIBRAR

Adotando-se o mesmo procedimento descrito no item 4.1., a equação de equilíbrio do ponto O (46B) utilizando-se a relação dada na equação 55 resulta:

$$- J_O \ddot{\psi} + K_{\psi x} \frac{\psi}{\alpha} - K_{\psi\psi} \cdot \psi - K_{xx} \frac{\psi}{\alpha} \cdot \ell + K_{x\psi} \cdot \psi \cdot \ell = 0 \quad (70)$$

No segundo modo de vibrar, o contrapeso do amortecedor praticamente gira em torno de um ponto fixo próximo ao 'centro de massa. Como o valor de  $x$  é muito pequeno, o valor de  $\alpha$  na equação 55 resulta muito grande, fazendo com que os termos divididos por  $\alpha$  na equação (70) possam ser desprezados, resultando :

$$- J_O \ddot{\psi} + K_{\psi x} \cdot u - K_{\psi\psi} \cdot \psi = 0 \quad (71)$$

Devemos agora introduzir na equação (71) a parcela devido ao amortecimento histerético, provocado pelas diversas deformações que ocorrem no cabo mensageiro do amortecedor. A equação de equilíbrio para o sistema torna-se:

$$J_O \ddot{\psi} + K_{\psi\psi} \cdot \psi + u \cdot K_{\psi x} + \frac{h_{\psi\psi}}{\Omega} \cdot \dot{\psi} + \dot{u} \cdot \frac{h_{\psi x}}{\Omega} = 0 \quad (72)$$

Experimentalmente verificou-se que as constantes de amortecimento estão relacionadas como  $h$  pelas seguintes relações, que são analogas àquelas deduzidas para a constante elástica  $K$  do cabo:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= 4h \\ h_{x\psi} &= 2hL \\ h_{\psi x} &= 2hL \\ h_{\psi\psi} &= \frac{4}{3} hL^2 \end{aligned} \quad (73)$$

Portanto a equação de equilíbrio para o sistema torna-se :

$$J_o \ddot{\psi} + K_{\psi\psi} \psi + u \cdot K_{\psi x} + \frac{h_{\psi\psi}}{\Omega} \dot{\psi} + u \frac{h_{\psi x}}{\Omega} \dot{\psi} = 0 \quad (74)$$

Adotando o mesmo procedimento utilizado no item 4.1., a equação 74 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$J_o \ddot{\psi} + \frac{h_{\psi\psi}}{\Omega} \dot{\psi} + K_{\psi\psi} \psi = - \frac{3}{2} U \cdot L \sqrt{\frac{K^2}{\psi\psi} + \frac{h^2}{\psi\psi}} \cdot \text{sen} (\Omega t + \beta) \quad (75)$$

$$\text{onde } \text{tg} \beta = \frac{h_{\psi\psi}}{K_{\psi\psi}} = \frac{h}{K} = u$$

Resolveremos esta equação da mesma forma que foi utilizada para solucionar a equação diferencial em 59, mas chamando de :

$$r=a_2 = \frac{\Omega}{w} \quad \text{e} \quad \rho = \mu = \frac{h}{K}$$

Resulta que a solução é :

$$\psi = \phi . \text{sen} ( \Omega t + \beta - \xi_2 ) \quad (76)$$

$$\text{onde} \quad \xi_2 = \text{arctg} . \frac{\mu}{1-a_2} \quad \text{e} \quad \phi = - \frac{3U}{2L} . \left[ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2 + (1-a_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (77)$$

A força que o amortecedor transmite ao vínculo (conductor) é dada por:

$$F_{am_2} = -2m\ddot{x}$$

A equação 46A fornece a expressão para F sem considerar o amortecimento por histérese no cabo mensageiro. Introduzindo-se este termo, a força transmitida ao condutor no segundo modo de vibrar será :

$$F_{am_2} = -2 \left( K_{xx} . u + K_{x\psi} . \psi - \frac{h_{xx}}{\Omega} . \dot{u} + \frac{h_{x\psi}}{\Omega} . \dot{\psi} \right) \quad (78)$$

que resulta em:

$$F_{am_2} = -2KU . \sqrt{1+\mu^2} \left[ 4\text{sen}(\Omega t + \beta) - 3 . \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu^2 + (1-a_2^2)^2} . \text{sen}(\Omega t - \alpha_2 + \beta) \right] \quad (79)$$

O trabalho que a força aplica ao vínculo, pode ser expressa por:

$$T = \int_v^T \dot{u} \cdot F_{am_2} \cdot dt \quad (80)$$

Integrando e desenvolvendo obtemos:

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot U^2 \cdot h \cdot Q \quad (81)$$

com

$$Q = \left[ 4 - 3 \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{\mu^2 + (1 - a_2^2)^2}} \cos \alpha_2 + \frac{3}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{\mu^2 + (1 - a_2^2)^2}} \sin \alpha_2 \right]$$

A potencia média dissipada em um ciclo no segundo modo de vibrar será :

$$P_M = T_2 \cdot f \quad (83)$$

com  $f = \frac{a_2 w_2}{2\pi}$  , portanto :

$$P_M = U^2 \cdot h \cdot a_2 \cdot w_2 \cdot Q \quad (84)$$

com Q dada pela expressão 82



## CAPITULO VI

### "COMPARAÇÃO DO MODELO TEORICO OBTIDO COM O EXPERIMENTAL."

#### 1. GENERALIDADES

No capítulo anterior apresentamos um modelo dinâmico do amortecedor, o qual procuraremos verificar se é válido, através de comparação com o comportamento real do amortecedor obtido a partir de amostras ensaiadas em laboratório.

Os ensaios em que nos baseamos para a execução deste trabalho foram efetuados pelo " Laboratório de Ensaio Dinâmicos do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo - IPT " a partir de testes em amostras do amortecedor Stockbridge modelo ST 20-21-22 produzido pela empresa SADE-Sul Americana de Engenharia S/A.

#### 2. DESCRIÇÃO DO SISTEMA EMPREGADO PARA O LEVANTAMENTO DAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DO AMORTECEDOR.

O ensaio consiste basicamente em submeter o amortecedor a um movimento vibratório senoidal, com amplitude de deslocamento constante e frequência variando continuamente num intervalo pré-estabelecido.

Nestas condições, são levantadas as seguintes curvas:

- Razão ( $F_{am}/U$ ) entre as amplitudes da força de resposta do amortecedor e o deslocamento da garra de fixação do cabo, em função da frequência  $f$ .

- Defasagem( $\delta$ ) entre os sinais da força e o deslocamento, em função da frequência.

Para o levantamento das características dinâmicas do amortecedor, a amostra é fixada por sua própria garra a uma barra de alumínio de diâmetro adequado, simulando a sua condição de fixação ao cabo. Esta barra faz parte de um dispositivo de fixação que é preso a um suporte através de dois transdutores de força.

Este suporte por sua vez, é fixado rigidamente à mesa do sistema excitador, como pode ser observado no esquema da figura 26.

Na figura 26, é apresentado o esquema dos equipamentos de excitação, medida e registro dos sinais de força, deslocamento e fase, utilizados para o levantamento das curvas de resposta dos amortecedores.

Sobre este esquema pode-se fazer as seguintes observações:

- O movimento da mesa vibratória tem frequência controlada por um gerador de varredura, e na amplitude de deslocamento fixada através do sinal de aceleração (A) que, após ser integrado duas vezes, é introduzido no controlador de amplitude do atuador.
- Os sinais provenientes dos transdutores de força ( $f_1, f_2$ ), após passarem pelos pré-amplificadores, são somados, obtendo-se o sinal de  $F_t$ , correspondente à força total aplicada pela mesa vibratória ao dispositivo de fixação e ao amortecedor. Deste sinal é então subtraída a componente  $F_d$  correspondente à força responsável pela aceleração do dispositivo de fixação da amostra, obtendo-se assim o sinal:

$$F_{am} = F_t - F_d$$

que corresponde à força necessária para excitar o amortecedor Stockbridge com a amplitude especificada.

- O sinal  $F_a$ , após ser filtrado, é retificado de modo a se obter em sinal D.C. proporcional à sua amplitude. Como a amplitude de deslocamento é mantida constante ao longo do ensaio, o sinal resultante é proporcional à relação  $F_{am}/U$ .

Assim, através de um registrador X-Y, obtém-se a curva de resposta do amortecedor, colocando-se no eixo Y o sinal proporcional a  $F_{am}/U$  e, no eixo X, um sinal DC proporcional à frequência, fornecido pelo gerador de varredura.

O gráfico da defasagem entre a força e o deslocamento é obtido através de um fasímetro, que fornece o sinal DC proporcional à defasagem dos sinais de entrada.

A partir das curvas levantadas é possível calcular para cada frequência de excitação, a energia dissipada por ciclo (E) pelo amortecedor, através da relação que foi vista no item 4 do Capítulo III :

$$E = \pi \cdot U \cdot F_{am} \cdot \sin \delta$$

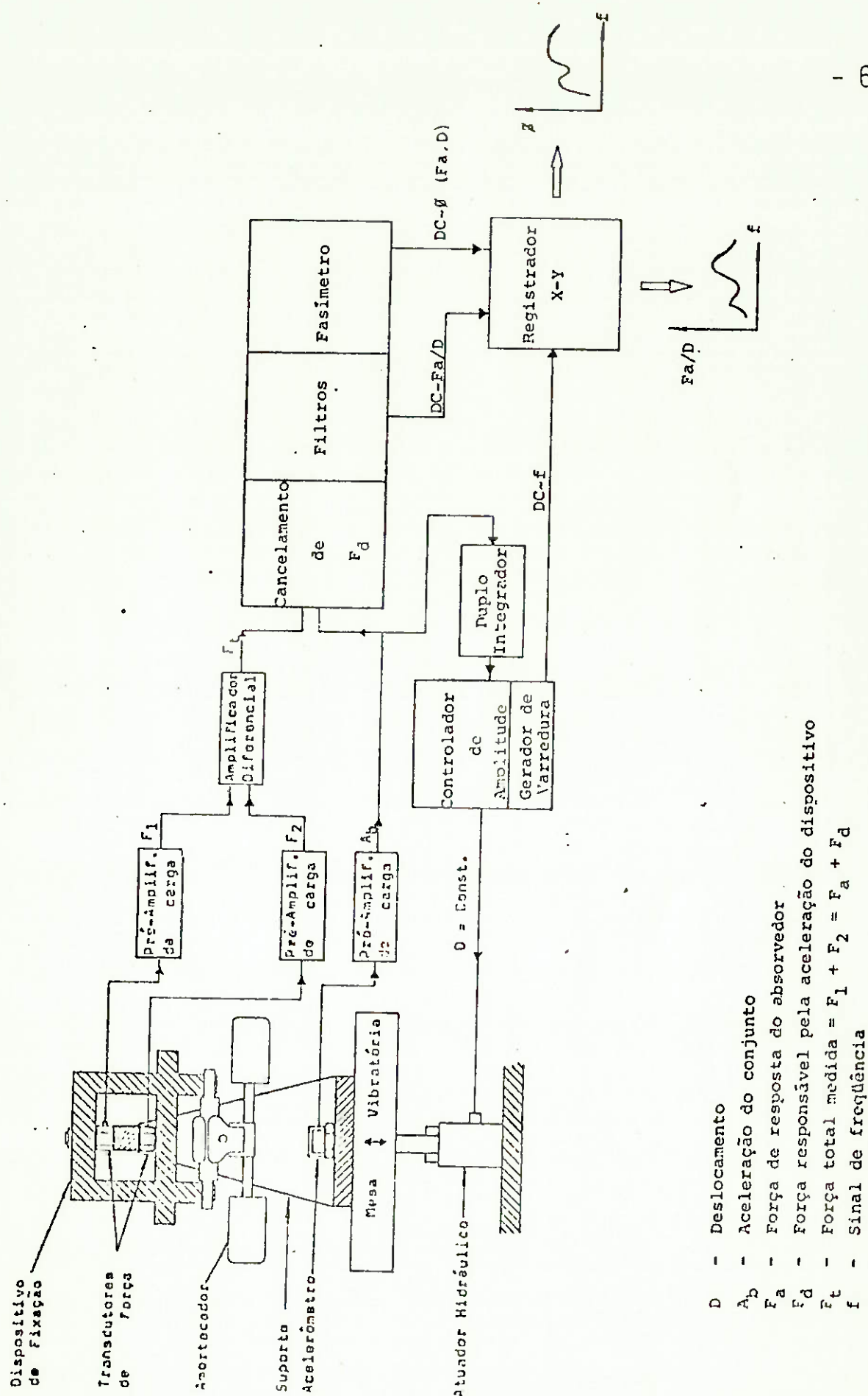


Figura 26 - Esquema do sistema utilizado para levantamento das características dinâmicas do amortecedor Stockbridge.

### 3. DETERMINAÇÃO DAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DO AMORTECEDOR STOCKBRIDGE.

Antes de passarmos à comparação entre o comportamento das curvas do modelo dinâmico com as do experimental é necessário determinar o centro de massa, volume, massa e momento de inércia de uma das calotas do amortecedor Stockbridge. Para tanto, utilizaremos a notação que é apresentada na figura 27.

#### 3.1. DETERMINAÇÃO DO VOLUME E PESO DE UMA CALOTA :

O material da calota do amortecedor ensaiado era zinco, cuja densidade é  $\rho = 7,14 \text{ g/cm}^3$ . Dividindo-se a calota em partes e adotando-se a notação da figura 26 resultam os seguintes volumes.

- parte 1:

$$V_1 = \pi \cdot \ell_1 \cdot \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

- parte 2 :

$$V_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \ell_1 \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - r^2 \right]$$

- parte 3 :

$$V = \pi \left( \frac{H}{2} \right)^2 \cdot r - \frac{2}{3} \pi r^3$$



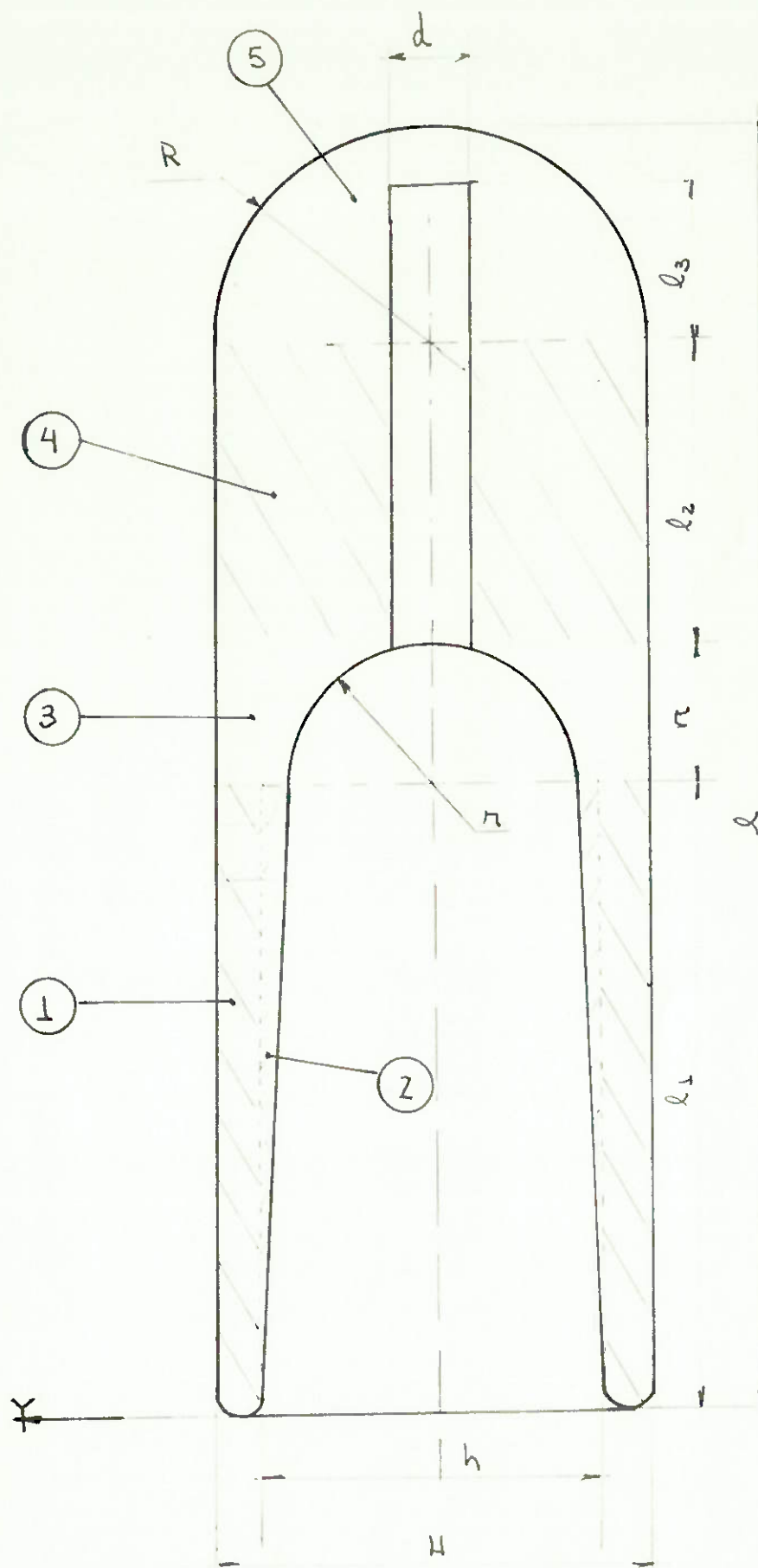


Figura 27 : Vista em corte de uma das calotas do amortecedor indicando a notação utilizada.

- parte 4 :

$$V_4 = \pi \left( \frac{H}{2} \right)^2 \cdot \ell_2$$

- parte 5 :

$$V_5 = \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \cdot (\ell_2 + \ell_3)$$

a massa do amortecedor será :

$$m = \rho \cdot V$$

onde  $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$

que resulta em :  $m = 3,113 \text{ Kg}$  e  $V = 436 \text{ cm}^3$

### 3.2. DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE MASSA.

Imaginemos um eixo y na posição indicada na figura 26 e calculemos os momentos estáticos da peça em relação a este eixo. Sabe-se que:

$$M_y = b \cdot S$$

onde  $M_y$  é o momento estático da figura, b a distância do centro de massa da figura ao eixo y e S é a área da figura. Como dividimos a peça em diversas partes (figuras), calculando-se o momento estático de cada parte em relação ao eixo y, teremos:

$$b = \frac{\sum M_y}{\sum S}$$

que nos fornece a posição do centro de massa em relação ao eixo y.

Assim temos:

- parte 1 (figura 1):

$$M_{y_1} = \ell_1^2 \cdot \left( \frac{H - h}{2} \right) \quad \text{e} \quad S_1 = \ell_1 (H - h)$$

- parte 2 (figura 2):

$$M_{y_2} = \frac{2}{3} \ell_1^2 \cdot \left( \frac{h}{2} - r \right) \quad \text{e} \quad S_2 = \ell_1 \left( \frac{h}{2} - r \right)$$

- parte 3 (figura 3):

$$M_{y_3} = \left( \ell_1 + \frac{r}{2} \right) \cdot r \cdot H - \left( \ell_1 + \frac{4r}{3\pi} \right) \cdot \frac{\pi r^2}{2}$$

e

$$S_3 = r \left( H - \frac{\pi r}{2} \right)$$

- parte 4 (figura 4)

$$M_{y_4} = \ell_2 (H - d) \cdot \left( \ell_1 + r + \frac{\ell_2}{2} \right)$$

$$S_4 = (H - d) \cdot \ell_2$$

- parte 5 :

$$M_{y_5} = \left( \ell - R + \frac{4R}{3\ell} \right) \cdot \frac{\ell R^2}{2} - \left( \ell - R + \frac{\ell_3}{2} \right) d \cdot \ell_3$$

$$S_5 = \frac{\ell R^2}{2} - d \cdot \ell_3$$

Os momentos estáticos e as áreas para cada uma das figuras resultam :

Figura	$M_y (\text{cm}^3)$	$S (\text{cm}^2)$
1	78,65	14,30
2	36,30	4,95
3	82,25	6,71
4	376,67	24,38
5	274,75	14,31
	$\Sigma M_y = 848,62 \text{ cm}^3$	$\Sigma S = 64,65 \text{ cm}^2$

$$b = 13,13 \text{ cm}$$

que indica a posição do centro de massa da calota. Para determinar o centro de massa do sistema devemos levar em conta a influencia do cabo. Na figura 28 é indicado esquematicamente o centro de massa da calota e do cabo.

A posição do centro de massa do conjunto será:

$$x_g = \frac{m \cdot (b+t) + m_c \cdot bc}{m_c + m}$$

onde bc e mc indicam a posição do baricentro e a massa do cabo respectivamente.

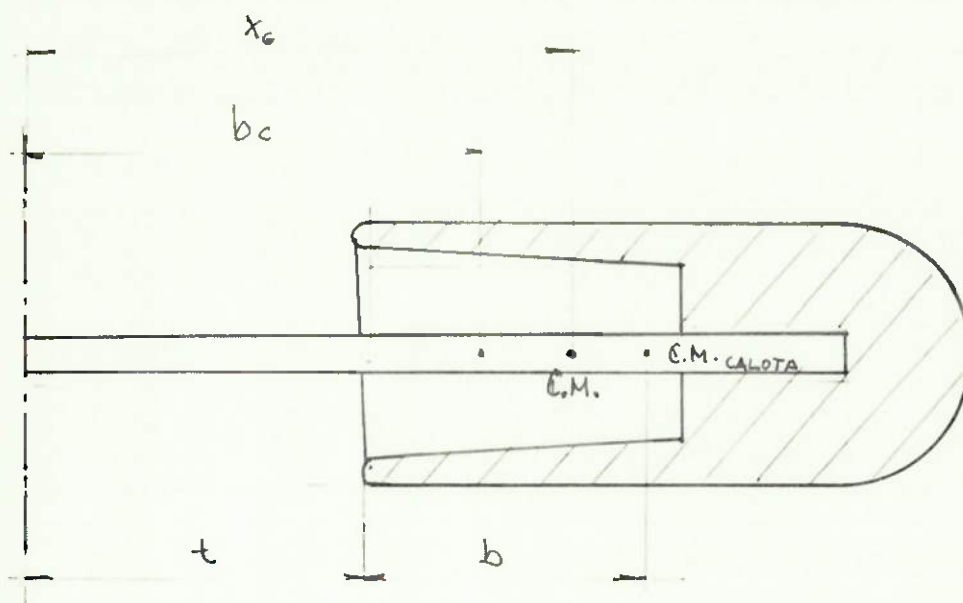


Figura 28: Posição do centro de massa.

Substituindo-se com os valores da geometria do amortecedor, obtemos que a distancia entre o centro de massa do sistema e o ponto de engastamento da calota é 0,40cm.

### 3.3.DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INERCIA.

Vamos determinar o valor do momento de inercia da calota em relação ao ponto de engastamento da calota. O' momento de inercia  $J_o$  de um corpo, em relação a um eixo ' qualquer, está relacionado ao momento de inercia  $J$  em relação a um eixo, paralelo ao primeiro, que passe pelo centro' de massa por

$$J = J_o + mh^2$$



onde  $m$  é a massa total do corpo e  $h$  a distancia entre os dois eixos.

Adotando-se este procedimento, vamos calcular o momento de inercia de cada parte em relação ao ponto de engastamento do condutor:

- parte 1 (figura 1-cilindro perfurado):

$$J_1 = \frac{m_1}{12} \cdot \left[ 3 \left( \frac{h}{2} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{H}{2} \right)^2 + \ell_1^2 \right]$$

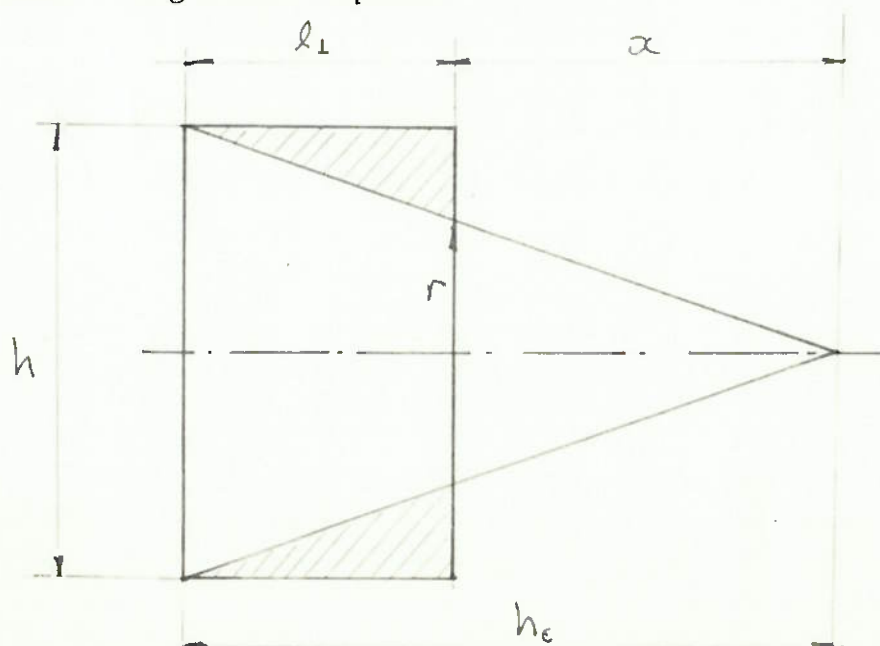
$$m_1 = \rho \cdot \pi \cdot \ell_1 \cdot \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

$$h_1 = \frac{\ell_1}{2} + r$$

$$J = m_1 \cdot h_1^2 + J_1$$

- parte 2 (figura 2):

Supondo o seguinte esquema:



o momento de inércia para o cilindro de diametro  $h$  e altura  $\ell_1$  é:

$$J_c = \frac{m_c}{12} \cdot \left[ 3 \left( \frac{h}{2} \right)^2 + \ell_1^2 \right]$$

$$m_c = \rho \cdot \pi \ell_1 \left( \frac{h}{2} \right)^2$$

$$h_c = \frac{\ell_1}{2} + r$$

para o cone maior, resulta:

$$J_h = \frac{m_h}{80} \left[ 12 \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 + 3 \left( \ell_1 + x \right)^2 \right]$$

$$m_h = \rho \cdot \pi \cdot \frac{h_c}{3} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \quad \text{com} \quad h_c = \ell_1 \left( \frac{2r}{h-2r} + 1 \right)$$

$$h_h = h_c$$

e para o cone menor vem:

$$J_b = \frac{m_b}{80} \cdot \left[ 12r^2 + 3 \cdot x^2 \right]$$

$$m_b = \rho \cdot \pi \cdot \frac{x}{3} \cdot r^2 \quad \text{com} \quad x = \frac{2r}{h-2r}$$

$$h_b = r - \frac{x}{3}$$

O momento de inércia para a parte 2 em relação ao ponto de engastamento da calota será portanto de :

$$J = J_c + m h_c^2 + J_b + m_b \cdot h_b^2 - ( J_h + m_h \cdot h_h^2 )$$

- parte 3 (figura 3)

Para o cilindro de diametro H e altura r vem:

$$J_e = \frac{m_e}{12} \cdot \left[ 3 \cdot \left( \frac{H}{2} \right)^2 + r^2 \right]$$

$$m_e = \rho \cdot \pi \cdot r \cdot \left( \frac{H}{2} \right)^2$$

$$h_e = \frac{r}{2}$$

Para a meia circunferencia de raio r vem:

$$J_c = \frac{m_c r^2}{5}$$

$$m_c = \rho \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} r^3$$

$$h_c = r \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right)$$

Portanto o momento de inércia da parte 3 será:

$$J = J_e + m_e \cdot h_e^2 - J_c + m_c \cdot h_c^2$$

- parte 4 : (cilindro)

$$J_4 = \frac{m_4}{12} \cdot \left[ 3 \left( \frac{H}{2} \right)^2 + (\ell_2)^2 \right]$$

$$m_4 = \rho \cdot \pi \cdot \left( \frac{H}{2} \right)^2 \cdot \ell_2$$

$$h_4 = \frac{\ell_2}{2}$$

Portanto :  $J = J_4 + m_4 \cdot h_4^2$

- parte 5 : (meia circunferencia)

$$J_5 = \frac{m_s \cdot R^2}{S}$$

$$m_5 = \rho \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} R^3$$

$$h_5 = \ell_2 + \frac{4R}{3\pi}$$

resulta :  $J = J_5 + m_5 \cdot h_5^2$

- furo preenchido com o cabo:

$$J_f = \frac{m_f}{12} \cdot \left[ 3 \left( \frac{d}{2} \right)^2 + (\ell_2 + \ell_3)^2 \right]$$

$$m_f = \pi \cdot \rho \cdot \left( \frac{d}{2} \right)^2 \cdot (\ell_2 + \ell_3) \quad \text{e} \quad h_f = (\ell_2 + \ell_3) \cdot 0,5$$

Resulta:

$$J = J_f + h_f^2 \cdot m_f$$

Aplicando nas equações os valores relativos ao amortecedor testado resulta:

Parte	Momento de Inércia(kg.cm <sup>2</sup> )
1	70,05
2	37,90
3	2,16
4	10,67
5	19,85
furo	0,74

Portanto o momento de inércia da calota do amortecedor em relação ao ponto de engastamento da calota no amortecedor é :

$$J_a = 141,4 \text{ kg.cm}^2$$

#### 4.DETERMINAÇÃO DAS FREQUENCIAS NATURAIS DO AMORTECEDOR E DA CONSTANCE ELASTICA K DO CABO.

No laboratório de ensaios dinamicos do IPT, foram levantadas curvas de desempenho de 3 amostras do amortecedor da SADE.Utilizando-se o esquema descrito anteriormente, foram levantadas as curvas  $F_{am}/U$  e de  $\delta(F_{am}, D)$  em função da frequência  $f$ .



Para o levantamento destas curvas, cada amostra foi fixada ao sistema excitador através de sua própria garra e submetida a um movimento vibratório senoidal, com amplitude de deslocamento constante e com a frequência variando continuamente dentro de uma faixa pré estabelecida.

As curvas de desempenho foram levantadas para as amplitudes e faixas de frequência discriminadas a seguir:

Amplitude	Faixa de frequência
0,35 mm	4 a 40 Hz
0,70 mm	4 a 40 Hz
1,50 mm	4 a 25 Hz
2,50 mm	4 a 15 Hz

Através da análise das curvas obtidas, foram escolhidos para desenvolvermos o nosso estudo, os seguintes gráficos:

Gráfico	Amostra	Amplitude	Faixa Frequencias
1	A	0,35 mm	4 a 40 Hz
2	B	0,35 mm	4 a 40 Hz

Como não possuímos os dados referentes a constante elástica K e o valor do coeficiente de amortecimento histerético, a melhor maneira de determiná-los é partindo-se dos gráficos obtidos nos ensaios.

Investigando-se os gráficos, determinamos que o valor da segunda frequência natural do sistema é 30Hz.

Partindo-se das características do amortecedor obtidas no item 3 deste capítulo e utilizando-se a equação 54 vista no capítulo V, vamos impor que a frequência de ressonância seja de 30Hz, obtendo assim o valor da constante elástica K do cabo.

- características do amortecedor testado:

massa da calota + cabo interno	:	m=3,16 kg
movimento de inercia da calota	:	$J_a=141,4 \text{ kg.cm}^2$
comprimento do cabo de aço	:	L=19,1 cm
distancia entre o centro de massa do amortecedor ao ponto de engastamento da calota do amortecedor	:	$\ell=0,40 \text{ cm}$
2ª frequência de ressonancia	:	$f_2=30 \text{ Hz}$

Aplicando-se a equação 54 resulta:

$$2\pi f_{1,2} = \sqrt{2.K \frac{501,5 \pm 444,3}{445,2}}$$

como  $f_2 = 30\text{Hz}$        $2\pi \cdot 30 = \sqrt{4,25.K}$

resulta  $K=836 \text{ Kg.m}^{-1}$  ou  $8360 \text{ Kg.s}^{-2}$

A partir deste valor de K, podemos determinar a outra frequência, que será:

$$f_1 = 7,4\text{Hz}$$

que representa uma diferença de 8%.

## 5. DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO HISTERÉTICO $h$ DO CABO MENSAGEIRO.

Como não possuímos o valor do coeficiente de amortecimento histerético  $h$  do cabo mensageiro utilizado pelo amortecedor, a melhor maneira de determiná-lo é impor que a força de resposta do amortecedor para a segunda frequência de ressonância coincida com o valor da força determinada em ensaio.

Observando-se o gráfico 2, para o qual determinaremos o valor de  $h$ , a frequência de ressonância ocorre para a frequência de 30 Hz e corresponde a razão  $F/U=285$  N/mm.

A expressão 54 fornece o valor máximo de  $F_{am2}$  :

$$\frac{F_{am2}}{U} = -2K \cdot \sqrt{1+\mu^2} \cdot \left[ 4 - 3 \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{\mu^2 + (1-a_2^2)^2}} \right]$$

com  $a_2 = f_2/f = 1$ , substituindo-se com o valor de  $K$  determinado anteriormente, resulta em :

$$17,045 = 3 \cdot \left( \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} \right) - 4$$

O valor de  $\mu$  que satisfaz esta equação é :

$$\mu = 0,15$$

Portanto o valor do coeficiente de amortecimento histerético  $h$  do cabo será:

$$h = \mu \cdot K = 0,15 (836)$$

Então :

$$h = 125,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{ou} \quad h = 1254 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$$

## 6. LEVANTAMENTO DAS CURVAS DO MODELO DINAMICO.

Neste ítem, após termos determinado as principais características do amortecedor ensaiado, vamos construir sobre os gráficos obtidos em ensaio, as curvas características do modelo dinamico proposto.

### 6.1. LEVANTAMENTO DAS CURVAS PARA O 1º MODO DE VIBRAR.

Para o primeiro modo de vibrar, utilizaremos a equação 63, que com as devidas simplificações e substituições resulta em :

$$\frac{F}{U} = 13,37 \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{(1 - a_2^2)^2 + \mu^2}} \quad (\text{N/mm})$$

onde :

$$a_1 = \frac{\Omega}{w_1} = \frac{f}{7,4}$$

Para diversos valores da frequência f, vamos construir as curvas de F/U em função da frequência para o 1º modo de vibrar. Estas curvas são apresentadas nos gráficos 1' e 2 sobrepostos a curva obtida do ensaio. Os pontos destas curvas são apresentados na tabela 1.

### 6.2. LEVANTAMENTO DAS CURVAS PARA O 2º MODO DE VIBRAR.

Adotando-se o mesmo procedimento adotado no ítem 6.1., empregando agora a equação 79, onde adotando-se o valor máximo para a força do amortecedor por:

$$\frac{F_{am_2}}{U} = - 2K \cdot \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \left[ 4 - 3 \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{\mu^2 + (1 - a_2^2)^2}} \right]$$

onde:  $a_2 = \frac{f}{30}$

e substituindo-se o valor de  $2K \cdot 1 + \mu^2$  por 16,90 obtemos:

$$\frac{F_{am_2}}{U} = - 17,10 \cdot \left[ 4 - 3 \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{\mu^2 + (1 - a_2^2)^2}} \right] \quad (N/mm)$$

Para vários valores de  $f$  construímos a curva  $F/U$  pela frequência para o 2º modo de vibrar. Os pontos destas curvas são tabelados na tabela 2.



T A B E L A - 1

f (Hz)	$a=f/7,4$	$\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{(1-a^2)^2 + \mu^2}}$	F/U (N/mm)
5	0,68	1,78	23,80
6	0,81	2,7	36,1
7	0,95	5,5	73,5
7,4	1	6,7	89,6
8,0	1,08	4,5	60,2
9,0	1,22	2,0	26,7
10	1,35	1,2	16,1
11	1,49	0,8	11,1
12	1,62	0,6	8,3

T A B E L A - 2

f(Hz)	$a=f/30$	$\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{(1-a^2)^2 + \mu^2}}$	F/U (N/mm)
23	0,77	2,3	50,0
25	0,83	3,0	85,5
27	0,90	4,2	147,0
29	0,97	6,2	249,7
30	1	6,9	285,0
31	1,03	6,3	255,0
33	1,10	4,0	137,0
35	1,17	2,6	65,0

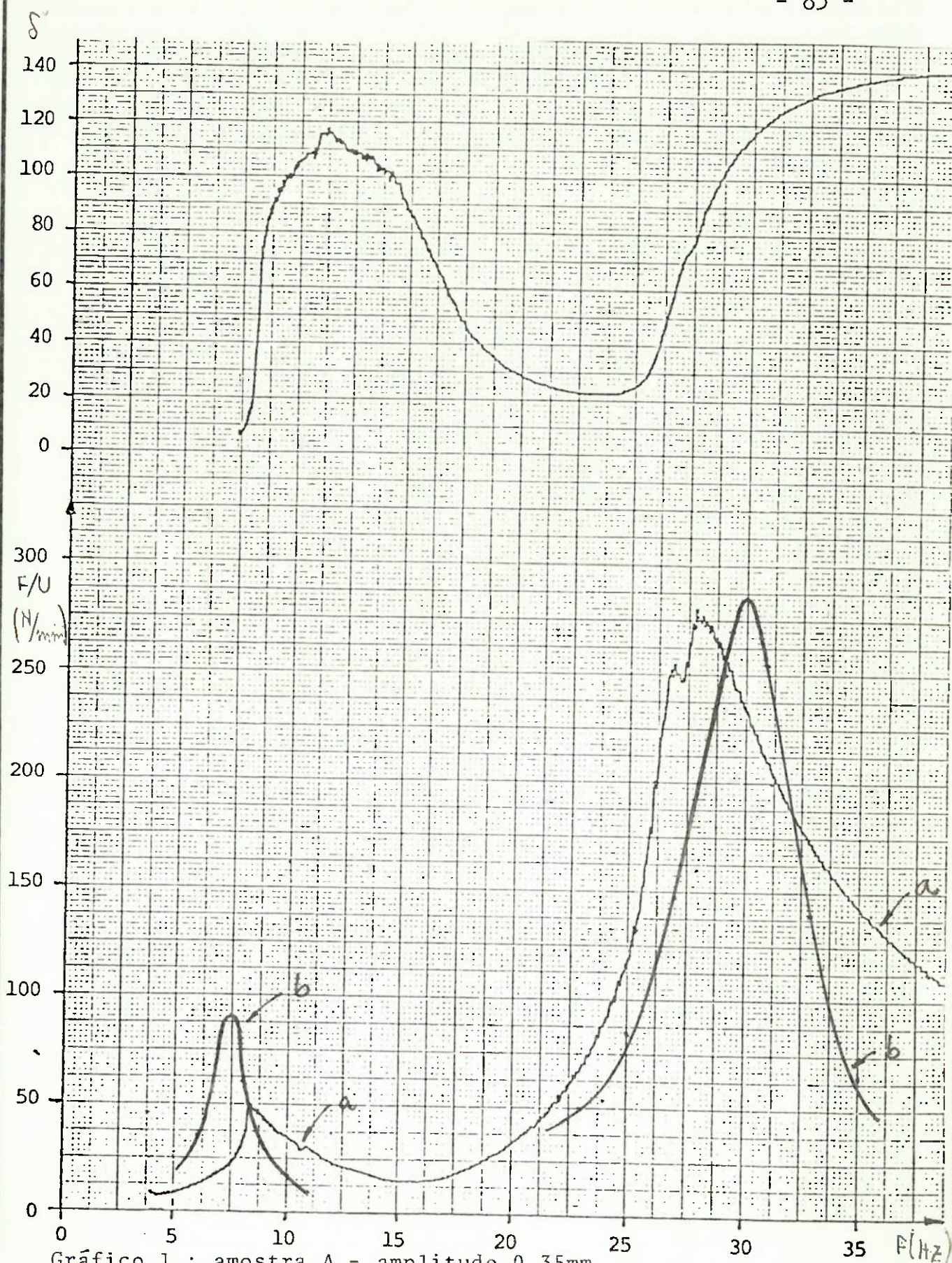


Gráfico 1 : amostra A - amplitude 0,35mm

(a) curva do modelo ensaiado

(b) curva do modelo dinamico



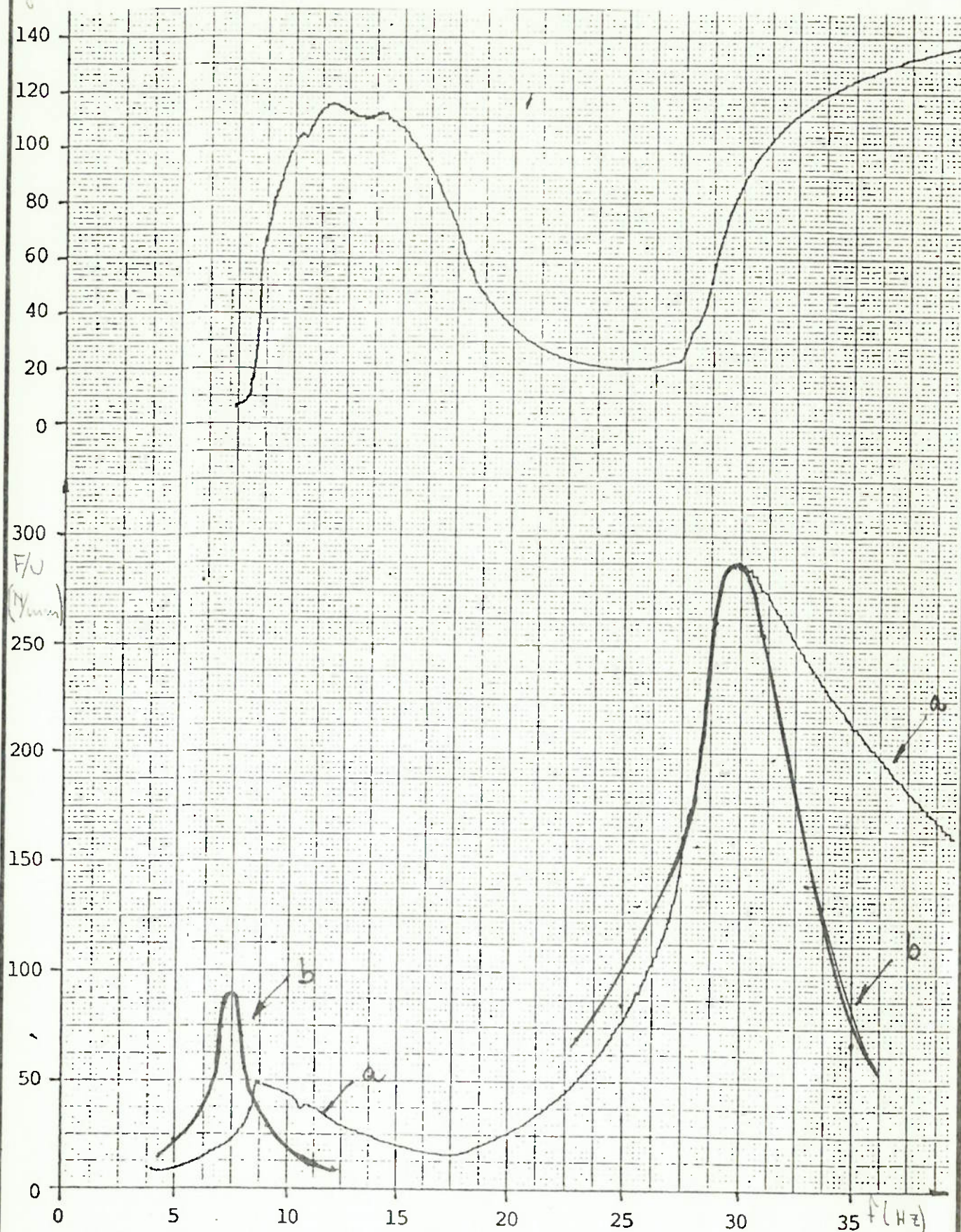


Gráfico 2 : amostra B - amplitude 0,35mm

(a) curva do modelo ensaiado

(b) curva do modelo dinamico

## CONCLUSÃO

Observando-se os gráficos 1 e 2, notamos que as curvas levantadas para o modelo teórico apresentam-se mais delgadas que as do modelo real. Isso indica que a energia dissipada não é proporcional ao quadrado da amplitude (como seria se o amortecimento fosse do tipo histerético).

Uma sugestão para trabalhos futuros seria o estudo do comportamento do amortecedor com dissipação do tipo Coulomb ou intermediário entre Coulomb e histerese.

A diferença entre as amplitudes dos gráficos para o primeiro e segundo modo de vibrar, indica que as hipóteses feitas na equação 73 para as constantes de amortecimento histerético necessitam de uma verificação experimental.

No tocante a determinação das frequências de ressonância o modelo mostrou-se suficientemente preciso.



- (1).ALCOA (Aluminium Company of America)  
"Overhead conductor vibration" section 4, 1961.
- (2).FARQUHARSON,F.B e Mc.HUGH,R.E.  
"Wind tunnel investigation of conductor with use of rigid models" - AIEE Transactions, outubro 1956,pg.871/878.
- (3).CLAREN,R. e DIANA,G.  
"Vibrazioni dei conduttori"; "L'energia elettrica"-nº10 e nº11 de 1966.
- (4).CLAREN,R.  
"The response of overhead line conductors to vortex shedding under laminar and turbulent air flow"
- (5).IEEE COMMITTEE REPORT -  
"Standardization of conductor vibration measurements"-AIEE Transactions, Janeiro 1966, pg.10-22
- (6).DIANA,G e FALCO,M.  
"On the forces transmitted to a vibrating cylinder by a blowing fluid" - Meccanica nº1, volume VI - 1971.
- (7).VIERCK,R.K.  
"Vibration Analysis" 1967.
- (8).MEIROVITCH,L.  
"Elements of vibration analysis" 2º Ed.Mc Graw-Hill Book Co., New York - 1975.
- (9).HARTOG, J.P.DEN.  
"Vibrações nos sistemas mecanicos" Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo - 1972.



- (10).TIMOSHENKO,S.  
"Strenght of Materials" vol.II Van Nostrand, New York.
- (11).GIACAGLIA,G.E.O.  
"Mecanica Geral", vol 2,                      Editora Nobel S/A,1974
- (12).STREETER,VICTOR L.  
"Mecanica dos fluidos", McGran Hill do Brasil, São Paulo  
1o - 1977.
- (13).SCHILICHTING,HERMANN.  
"Boundary - Layer Theory", McGraw-Hill Book Co., New  
York - 1968.
- (14).HARRIS,C.M. e CREDE, C.E.  
"Shock and vibration Handbook", 2ªed., McGraw.Hill Book  
Co., New York, 1976